Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP
2a Avaliação de Matemática - T210
20/04/2017
Prof. Dr. Thiago Grando

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ______________________

Nº prontuário : ______________________

Assinatura : GABARITO

Observações - Leia com atenção!

1. A prova pode ser feita a lápis. **O cabeçalho deve ser preenchido a tinta.**

2. Em cada questão **justifique** sua resolução.

3. Manter celulares **desligados e guardados.**

4. Você terá 1h 30 min para a resolução da prova.

5. **Leia** os enunciados das questões **com bastante atenção** e **Boa Prova.**

1a. questão: (2,0) O objetivo da questão é mostrar que a equação

$$\operatorname{arctg}(e^x + 2) - \operatorname{arcot}\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) = \frac{\pi}{4},$$

admite apenas uma solução em $\mathbb{R}$. Para isso:

a. Chamando $\alpha = \operatorname{arctg}(e^x + 2)$ e $\beta = \operatorname{arcot}\left(\dfrac{e^x}{e^{2x} - 1}\right)$, encontre $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$.

b. Igualando $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, encontre o valor de x.

SOLUÇÃO:

a) $\alpha = \operatorname{arctg}(e^x + 2) \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = e^x + 2$

$\beta = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) \Rightarrow \cot(\beta) = \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\beta)} = \frac{e^x}{e^{2x} - 1} \Rightarrow \operatorname{tg}(\beta) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}.$$

b) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$, logo;

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{e^x + 2 - \left(\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)}{1 + (e^x + 2)\left(\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)} = 1 \Rightarrow$$

CONTINUAÇÃO 01 :

b)

$$\frac{\dfrac{\cancel{e^{2x}}+2e^{x}-\cancel{e^{2x}}+1}{\cancel{e^{x}}}}{\dfrac{e^{x}+(e^{x}+2)(e^{2x}-1)}{\cancel{e^{x}}}}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{+2e^{x}+1}{\cancel{e^{x}}+e^{3x}-\cancel{e^{x}}+2e^{2x}-2}=1 \Rightarrow$$

$$+2e^{x}+1=e^{3x}+2e^{2x}-2 \Rightarrow$$

$$(e^{x})^{3}+2(e^{x})^{2}-2e^{x}-3=0 .$$

Chame $y=e^{x}$. Logo:

$$y^{3}+2y^{2}-2y-3=0$$

Note que -1 é raiz do polinômio acima.

Assim:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{y^{3}} & +2y^{2} & -2y & -3 & \;y+1 \\ \cline{5-5}
-\cancel{y^{3}} & -y^{2} & & & \;y^{2}+y-3 \\ \cline{1-2}
 & \cancel{y^{2}} & -2y & & \\
 & -\cancel{y^{2}} & -y & & \\ \cline{2-3}
 & & -3y & -\cancel{3} & \\
 & & 3y & +\cancel{3} & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Logo:

(*)
$$0 = y^3 + 2y^2 - 2y - 3 = (y+1)(y^2 + y - 3)$$

Vamos encontrar as raízes de $y^2 + y - 3 = 0$:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1(-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Assim, as 3 raízes da equação (*) são:

$$y_1 = -1 \quad \times$$

$$\boxed{y_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \quad \checkmark}$$

$$y_3 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \quad \times$$

Com isso,

$$y_2 = e^x \Rightarrow$$

$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} = e^x \Rightarrow \ln\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) = \ln e^x = x \quad ///$$

2a. questão: (1,5) Seja $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pede-se:

a. Se x satisfaz a equação $4\text{tg}^4\text{x} = \frac{1}{\cos^4\text{x}} + 4$ verifique que $\cos(2x) = -\frac{1}{4}$.

(Lembre que $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$).

b. Usando uma relação fundamental e o resultado obtido em **a**), verifique que

$$\text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

c. Finalmente, escrevendo $\text{sen}(4x) = \text{sen}2(2x)$, mostre que $\text{sen}(2x) + \text{sen}(4x) = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

SOLUÇÃO:

a) Se $4\,tg^4(x) = \frac{1}{\cos^4(x)} + 4$ então $4\frac{\text{sen}^4(x)}{\cancel{\cos^4(x)}} = \frac{1 + 4\cos^4(x)}{\cancel{\cos^4(x)}}$

$\Rightarrow 4\,\text{sen}^4(x) = 1 + 4\cos^4(x) \Rightarrow 4(\text{sen}^4(x) - \cos^4(x)) = 1$

$\Rightarrow 4\,(\underbrace{\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)}_{=1})(\text{sen}^2(x) - \cos^2(x)) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\,(\text{sen}^2(x) - \cos^2(x)) = 1 \Rightarrow 4(-(\underbrace{\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)}_{=\cos(2x)})) = 1$

$\Rightarrow -4\cos(2x) = 1 \Rightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{4}$

b) Como $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Logo

$0 = 2 \cdot 0 \leq 2 \cdot x < 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$, ou seja $2x \in [0, \pi[$.

Assim $\text{sen}(2x) > 0$. Usando a relação fundamental:

(*)

CONTINUAÇÃO (02):

b) $$\operatorname{sen}^2(2x) + \cos^2(2x) = 1 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^2(2x) + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^2(2x) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sqrt{\operatorname{sen}^2(2x)}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(2x) \overset{(*)}{=} |\operatorname{sen}(2x)| = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$ Ou seja

$$\operatorname{sen}(2x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

c) $$\operatorname{sen}(4x) = \operatorname{sen} 2(2x) = 2\operatorname{sen}(2x)\cdot\cos(2x)$$

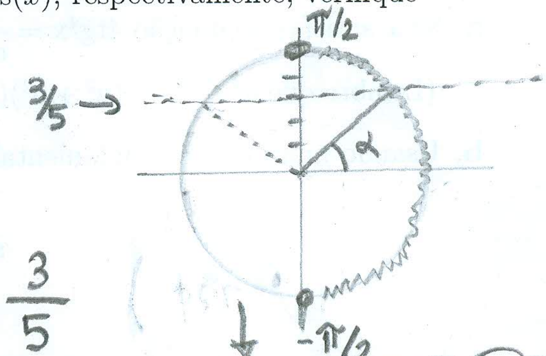
$$= \cancel{2}\frac{\sqrt{15}}{\cancel{4}_{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{15}}{8}$$

Logo, $$\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(4x) = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{8} - \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

3a. questão: (1,5) Se arcsen : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$, são as funções trigonométricas inversas das funções sen(x) e cos(x), respectivamente, verifique que $\cos\left(\text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) + \text{arccos}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ vale $\frac{7}{25}$.



veja que α não pode estar no 2º quadrante.

SOLUÇÃO: Chame:

$$\alpha = \text{arc sen}\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \text{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$$

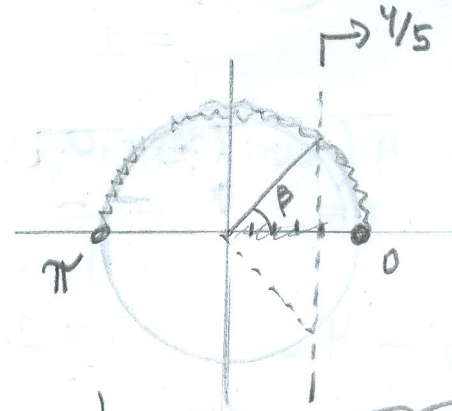
$$\beta = \text{arc cos}\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{4}{5}$$

Com isso,

$$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sqrt{\cos^2(\alpha)} = \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow$$

$$|\cos(\alpha)| = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{4}{5}}$$



$$\text{sen}^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1 \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2(\beta) + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2(\beta) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\text{sen}^2(\beta)} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$|\text{sen}(\beta)| = \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\beta = \frac{3}{5}}$$

note que β não pode estar no 4º quadrante

CONTINUAÇÃO 03 :

Logo :

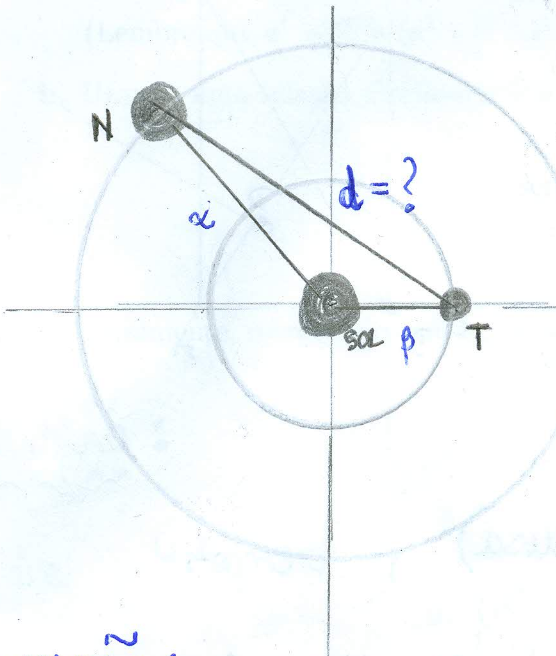
$$\cos\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3}{5}\right)+\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{4}{5}\right)\right)=$$

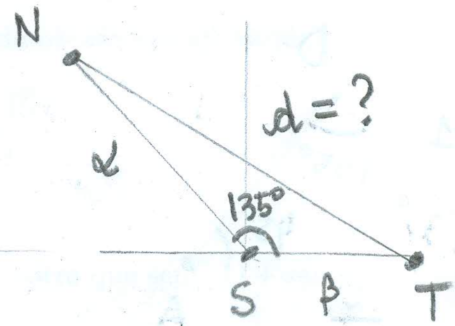
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$$

$$=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}\ //$$

4a. questão: (1,5) Se o segmento de reta que liga Netuno ao Sol faz um ângulo de 135^o com o segmento de reta que liga a terra ao Sol, então qual a distância entre os dois planetas? Considerar α e β os comprimentos dos respectivos segmentos.





SOLUÇÃO:

A lei dos cossenos nos diz que:

$$d^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos(135^\circ) \Rightarrow$$

$$d^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos(90^\circ + 45^\circ) \Rightarrow$$

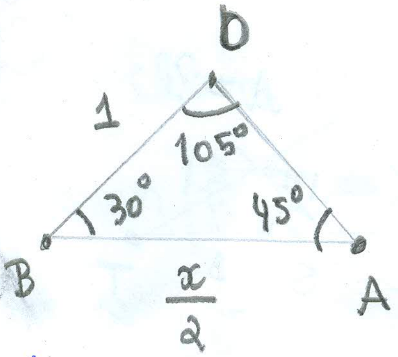
$$d^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\left(\underbrace{\cos 90^\circ}_{0} \cdot \cos 45^\circ - \underbrace{\operatorname{sen} 90^\circ}_{1} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} 45^\circ}_{\sqrt{2}/2}\right) \Rightarrow$$

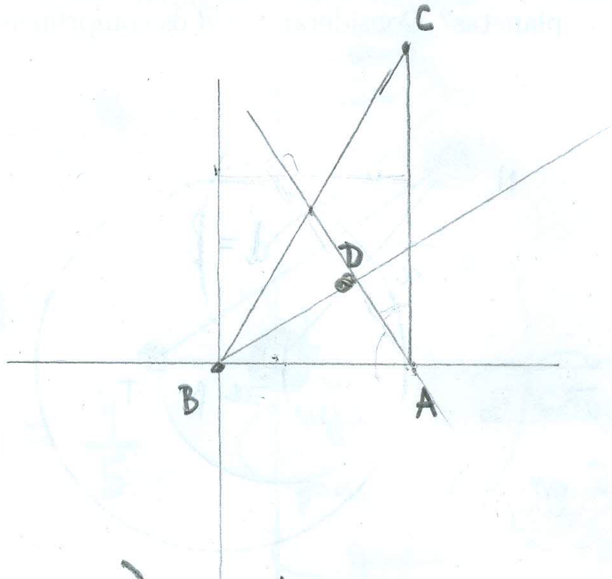
$$d^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$d^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{2}\,\alpha\cdot\beta \Rightarrow$$

$$d = |d| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{2}\,\alpha\cdot\beta}$$

5a. questão: (2,0) Num triângulo ABC, retângulo em A, temos que $\hat{B} = 60^o$. As bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ se encontram no ponto D. Se o segmento de reta BD mede $1cm$, determine a medida da hipotenusa.





SOLUÇÃO:

Chamando $x = BC$ (hipotenusa), temos que $AB = \frac{x}{2}$. Logo pela lei dos senos:

$$\frac{\frac{x}{2}}{sen(105°)} = \frac{1}{sen(45°)} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2} = \frac{sen(105°)}{sen(45°)} = \frac{sen(60° + 45°)}{sen(45°)} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2} = \frac{sen\,60° \cdot \cos 45° + sen\,45° \cdot \cos 60°}{sen\,45°} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}+1 \text{ cm}$$

6a. questão: (1,5) Mostre que a soma das raízes da equação $\text{sen}^2(x) - \text{sen}(-x) = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é igual a $\frac{9\pi}{2}$.

SOLUÇÃO:

Chame de $y = \text{sen}\, x$. Usando que $-\text{sen}(-x) = \text{sen}(x)$

então:

$$y^2 + y = 0 \implies y(y+1) = 0 \implies y = 0 \text{ ou } y = -1$$

Logo, (I) $\text{sen}(x) = 0$ ou (II) $\text{sen}(x) = -1$ em $[0, 2\pi]$. Isso acontece

se, e somente se: (I) $x = 0, \pi, 2\pi$
(II) $x = \frac{3\pi}{2}$

Somando:

$$0 + \pi + 2\pi + \frac{3\pi}{2} = 3\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{6\pi + 3\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

♡♠∞ **Questão Extra:** (1,0)

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{se} \quad x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{x}\cos(2x) & \text{se} \quad x \geq \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

onde $a > 0$ é uma constante. Considere $K = \{y \in \mathbb{R} : f(y) = 0\}$. Qual o valor de a, sabendo-se que $f(\pi) \in K$?

SOLUÇÃO:

Como $\pi > \dfrac{\pi}{2}$, então $f(\pi) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{\pi} \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{a}{\pi}.$$

Além disso, sabemos que $f(\pi) \in K$, então

$$f(f(\pi)) = 0 \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{\pi}\right) = 0.$$

Como $a > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{\pi} > 0 \Rightarrow -\dfrac{a}{\pi} < 0 \Rightarrow$

$\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{\pi} < \dfrac{\pi}{2}$. Logo $f\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{\pi}\right) = a\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{\pi} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Assim, $a\left(\pi - \dfrac{a}{\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow \pi - \dfrac{a}{\pi} = 0$ (pois $a > 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\pi} = \pi \Leftrightarrow a = \pi^2$$