Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP
1a Avaliação de Matemática - T210
23/03/2017
Prof. Dr. Thiago Grando

Nome : GABARITO

N^o prontuário : ____________________

Assinatura : ____________________

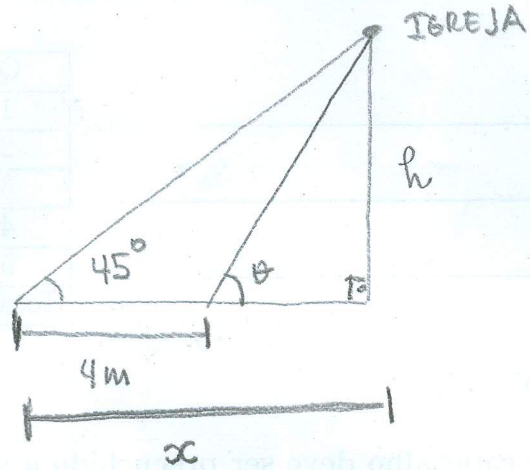
Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

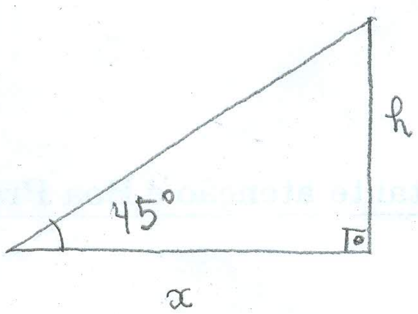
Observações - Leia com atenção!

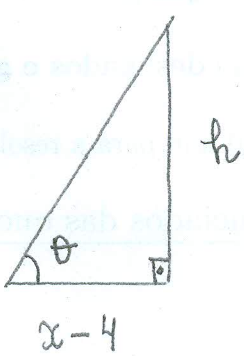
1. A prova pode ser feita a lápis. **O cabeçalho deve ser preenchido a tinta.**
2. Em cada questão **justifique** sua resolução.
3. Manter celulares **desligados e guardados**.
4. Você terá 1h 30 min para a resolução da prova.
5. **Leia** os enunciados das questões **com bastante atenção** e **Boa Prova**.

1a. questão: (2,0) Uma pessoa observa uma igreja situada no pico de um morro sob ângulo de 45^o. Aproximando-se 4 metros, o observador passa a vê-lo sob um ângulo θ, tal que $\tan(\theta) = 3$. Determine a altura do morro.

SOLUÇÃO:







$$tg\,45^\circ = \frac{h}{x} \qquad\qquad tg\,\theta = \frac{h}{x-4}$$

$$1 = \frac{h}{x} \qquad\qquad 3 = \frac{h}{x-4}$$

$$h = x \qquad\qquad h = 3x - 12$$

$$3x - 12 = x$$

$$-2x = -12$$

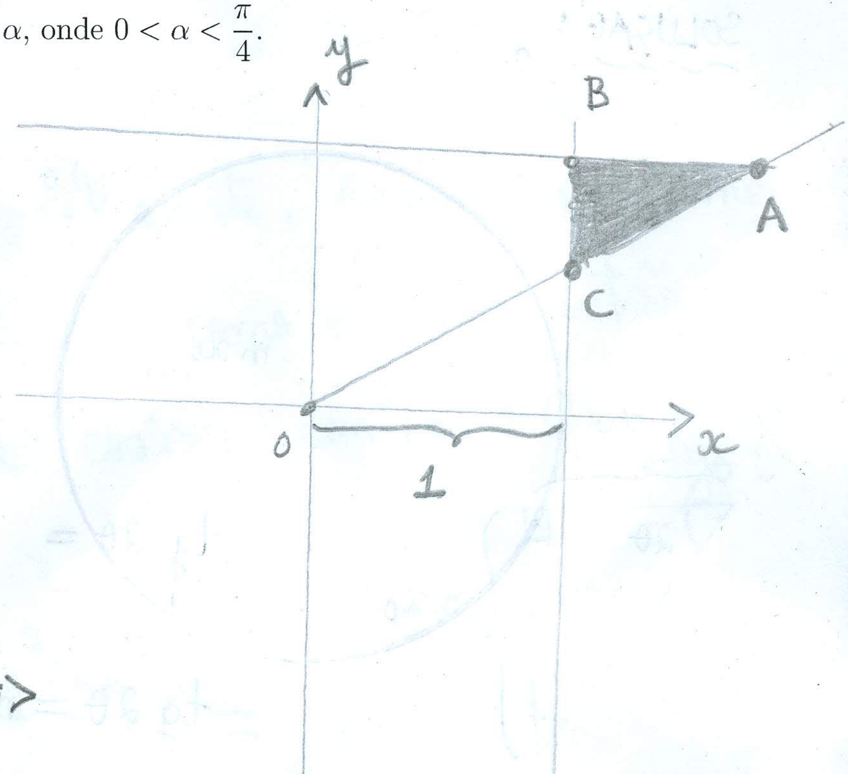
$$x = 6$$

Logo $h = 6$ m.

2a. questão: (2,0) Com base na figura, que representa o ciclo trigonométrico, e os eixos da tangente e da cotangente, e sendo α o ângulo $B\hat{A}C$, determine:

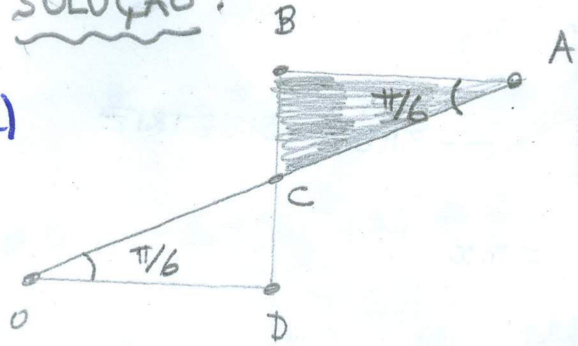
a. a área do triângulo ABC, para $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

b. a área do triângulo ABC, em função de α, onde $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$.



SOLUÇÃO:

a)



$$\overline{CD} = tg(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$1 = \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BC} + \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\overline{BC} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg(\pi/6) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{AB} = \frac{3}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right). \text{ Logo } S = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{2} = \frac{\frac{3}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{2}$$

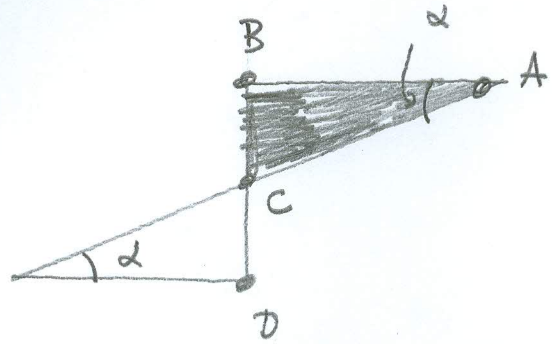
$$S = \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\cancel{3}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{(3-\sqrt{3})^2}{\cancel{9}_3} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{6\sqrt{3}}$$

$$= \frac{9-6\sqrt{3}+3}{6\sqrt{3}} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{\cancel{6}(2-\sqrt{3})}{\cancel{6}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{3} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1 \text{ u.a.}$$

CONTINUAÇÃO 2ª QUESTÃO:

b)



$\overline{CD} = tg\,\alpha \implies \overline{BC} = 1 - tg(\alpha) \implies$

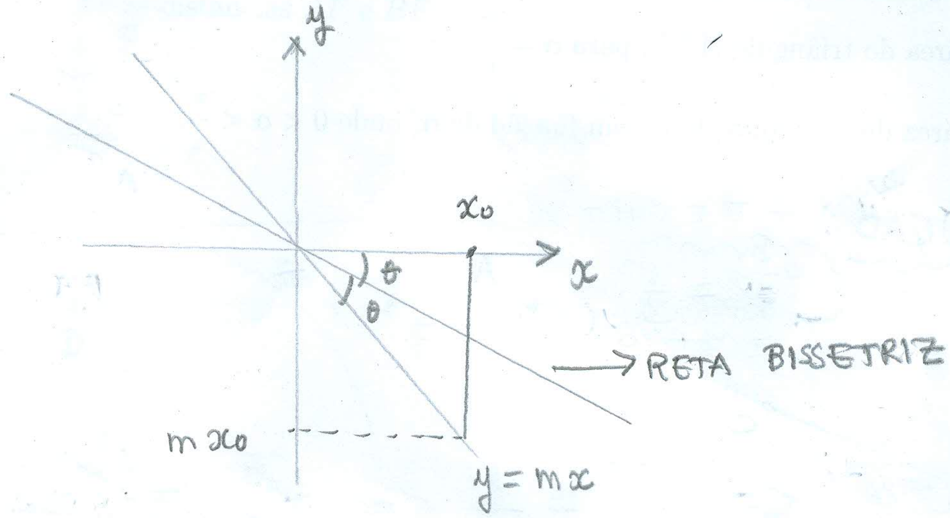
$$tg(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1 - tg(\alpha)}{\overline{AB}} \implies$$

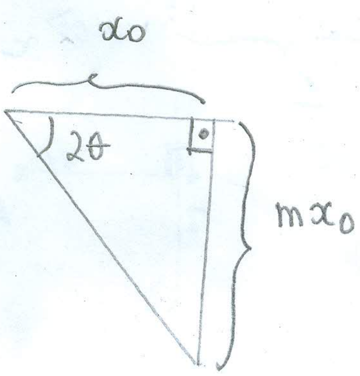
$$\overline{AB} = \frac{1 - tg(\alpha)}{tg(\alpha)} = \frac{1}{tg(\alpha)} - 1 = cotg(\alpha) - 1$$

Logo:
$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{(cotg(\alpha) - 1)(1 - tg(\alpha))}{2} \text{ u.a.}$$

3a. questão: (2,0) Determinar a equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta $y = mx$, $m < 0$ forma com o eixo dos x.

SOLUÇÃO:





$$tg\, 2\theta = \frac{m \cancel{x_0}}{\cancel{x_0}} \Rightarrow$$

$$tg\, 2\theta = m \Rightarrow$$

$$\frac{tg\,\theta + tg\,\theta}{1 - tg\,\theta \cdot tg\,\theta} = m \Rightarrow \frac{2\, tg\,\theta}{1 - tg^2\theta} = m \Rightarrow$$

$$2\, tg\,\theta = m(1 - tg^2\theta) \Rightarrow 2\, tg\,\theta = m - m\, tg^2\theta \Rightarrow$$

$m\, tg^2\theta + 2\, tg\,\theta - m = 0$. Chame $a = tg\,\theta$,

$$ma^2 + 2a - m = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4m(-m)}}{2m} \Rightarrow$$

$a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + m^2}}{m}$. Como $m < 0$, então

$a = \dfrac{\overset{>0}{-1 + \sqrt{1 + m^2}}}{\underset{<0}{m}} < 0$. Assim $y = \left(\dfrac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}\right) \cdot x$ é a eq. da reta bissetriz.

4a. questão: (2,0) Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $x \neq \frac{\pi}{4}$. Mostre que

$$\frac{1}{\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)^2} - \frac{4\tan(x)}{\left(1 - \tan^2(x)\right)^2} = 1.$$

SOLUÇÃO:

Como $x \neq \frac{\pi}{2}$, então $tg(x)$ existe. Além disso, como $x \neq 0$, $1 - tg^2(x) \neq 0$. Ainda, como $x \neq \frac{\pi}{4}$, então $\cos(x) \neq sen(x)$, ou seja $\cos^2(x) - sen^2(x) \neq 0$. Logo:

$$\frac{1}{\left(\cos^2(x) - sen^2(x)\right)^2} - \frac{4\,tg^2(x)}{\left(1 - tg^2(x)\right)^2} =$$

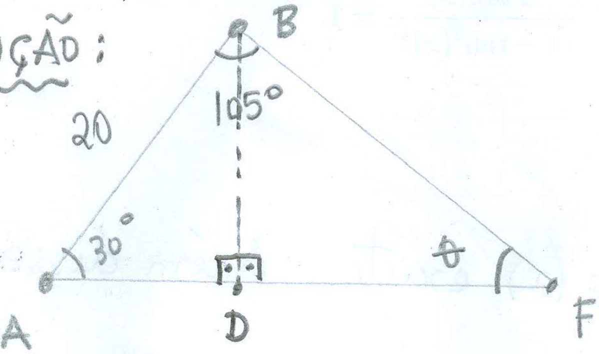
$$\frac{1}{\left(\cos(2x)\right)^2} - \left(\frac{2\,tg(x)}{1 - tg^2(x)}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{\cos(2x)}\right)^2 - \left(\frac{tg\,x + tg(x)}{1 - tg\,x \cdot tg\,x}\right)^2 =$$

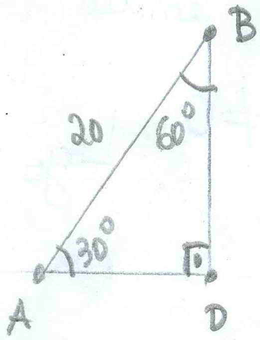
$$\sec^2(2x) - tg^2(2x) = 1.$$

5a. questão: (2,0) Observadores nos pontos A e B localizam um foco de incêndio florestal em F. Conhecendo os ângulos $F\hat{A}B = 30^o$ e $F\hat{B}A = 105^o$ e a distância $AB = 20\ km$, determine as distâncias AF e BF.

SOLUÇÃO:

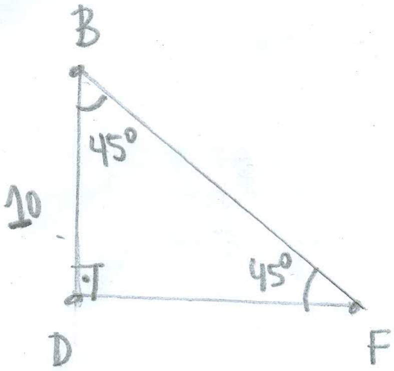


Como: $30^\circ + 105^\circ + \theta = 180^\circ$, então $\theta = 45^\circ$



$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{BD}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BD}{20} \Rightarrow \overline{BD} = 10\ Km$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{20} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{20} \Rightarrow \overline{AD} = 10\sqrt{3}\ Km$$



$$\text{Sen}\,45^\circ = \frac{10}{BF} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{BF} \Rightarrow$$

$$BF = \frac{20}{\sqrt{2}} \Rightarrow BF = \frac{20\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overline{BF} = 10\sqrt{2}\ km$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\overline{DF}}{\overline{BF}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{DF}}{10\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\overline{DF} = \frac{10 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow \overline{DF} = 10\ Km$$

$$\overline{AF} = \overline{AD} + \overline{DF} = 10\sqrt{3} + 10 = 10(\sqrt{3}+1)\ km$$

♡∞ **Questão Extra:** (1,0) Determine o conjunto solução de

$$(\tan^2(x) - 1)(1 - \cot^2(x)) = 4, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

SOLUÇÃO:

$$(tg^2(x)-1)\left(1-\frac{1}{tg^2(x)}\right) = (tg^2(x)-1)\left(\frac{tg^2(x)-1}{tg^2(x)}\right) = \frac{(tg^2(x)-1)^2}{tg^2(x)}.$$

Logo, $$\frac{(tg^2(x)-1)^2}{tg^2(x)} = 4 \Rightarrow 1 = \frac{4 \cdot tg^2(x)}{(tg^2(x)-1)^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2\,tg(x)}{tg^2(x)-1}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{tg(x)+tg(x)}{1-tg^2(x)}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$tg^2(2x) = 1 \Rightarrow \sqrt{tg^2(2x)} = 1 \Rightarrow |tg(2x)| = 1$$

$$\Rightarrow tg(2x) = \pm 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$