

PICME/IME/USP COMBINATÓRIA

NOTAS - 2012 (SEMESTRE 1)

YOSHIHARU KOHAYAKAWA, MIGUEL ABADI E PAULO VICTOR EUFRÁSIO (IME/USP)

1. O PROBLEMA DAS DISTÂNCIAS DISTINTAS DE ERDŐS

13/03/2012 (Por Leonardo N. Coregliano)

Seja $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}^k$ um conjunto de $n > 0$ pontos no espaço. Seja $\Delta(P) = \{d(x, y) : x, y \in P\}$ o conjunto das distâncias distintas determinadas por pontos de P .

Observação 1. *É fácil observar que $|\Delta(P)| \leq \binom{n}{2} + 1$, pois, no máximo, a cada dois pontos distintos temos uma distância diferente.*

Dados inteiros positivos k e n , definimos

$$m_k(n) = \min\{|\Delta(P)| : P \subseteq \mathbb{R}^k, |P| = n\}$$

e

$$M_k(n) = \max\{|\Delta(P)| : P \subseteq \mathbb{R}^k, |P| = n\}.$$

Proposição 2. *Dados inteiros positivos k e n , temos $M_k(n) = \binom{n}{2} + 1$.*

Demonstração. Tome o conjunto $P = \{(2^l, 0, \dots, 0) : l = 1, 2, \dots, n\}$. Observe que $|\Delta(P)| = \binom{n}{2} + 1$, donde concluímos a prova usando a Observação 1. \square

Proposição 3. *Para todo inteiro positivo n , temos $m_1(n) = n$.*

Demonstração. Para ver que $m_1(n) \leq n$, tome $P = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Para ver que $m_1(n) \geq n$, considere $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p_0 < p_1 < \dots < p_{n-1}$. Olhando apenas para as distâncias de cada ponto a p_0 , temos exatamente n distâncias distintas, donde concluímos a prova. \square

1.1. Um resultado em \mathbb{R}^k .

Proposição 4. Para todo inteiro $k \geq 2$, temos $m_k(n) \leq kn^{2/k} + 1$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideramos $n = t^k$, para algum $t \in \mathbb{N}$. Tome $P = \{0, 1, \dots, t-1\}^k$. Vamos mostrar que $|\Delta(P)| \leq kn^{2/k} + 1$.

Para isto, observe que $|\Delta(P)| = |\Delta^2(P)|$, onde $\Delta^2(P) = \{(d(x, y))^2 : x, y \in P\}$. Para quaisquer $x, y \in P$, temos

$$0 \leq (d(x, y))^2 = \sum_{l=1}^k (x_l - y_l)^2 \leq k(t-1)^2.$$

Portanto, $|\Delta(P)| \leq k(t-1)^2 + 1 = kn^{2/k} + 1$ □

1.2. Um resultado em \mathbb{R}^2 .

Teorema 5 (Erdős, 1946). Temos $m_2(n) = \Omega(\sqrt{n})$.

Demonstração. Sejam $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ e $C = \{\delta Br(p_0) : \delta Br(p_0) \cap P \neq \emptyset\}$, onde $\delta Br(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p) = r\}$. Ou seja, C é o conjunto das esferas centradas em p_0 que intersectam P em um ou mais pontos. Claramente $|\Delta(p)| \geq |C|$.

Considere agora que $t = |C| < \sqrt{n}$ (pois, caso contrário, já teríamos $m_2(n) = \Omega(\sqrt{n})$). Pelo P.C.P., existe $\tilde{C} \in C$ tal que $|\tilde{C} \cap P| \geq \frac{n}{t} > \sqrt{n}$.

Novamente pelo P.C.P., \tilde{C} possui um hemisfério H tal que $|H \cap P| \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$. Seja p_1 o ponto de P sobre H mais à direita. Ou seja, $p_1 = (x_1, y_1) \in H \cap P$ tal que $\nexists(x, y) \in H \cap P$ com $x > x_1$.

Seja $D = \{\delta Br(p_1) : H \cap P \cap \delta Br(p_1) \neq \emptyset\}$ o conjunto das esferas centradas em p_1 que intersectam os pontos de P sobre H .

Claramente $|\Delta(P)| \geq |\Delta(H \cap P)| \geq |D| = |H \cap P| \geq \frac{\sqrt{n}}{2} = \Omega(\sqrt{n})$. □

Teorema 6 (Moser). Temos $m_2(n) = \Omega(n^{2/3})$.

Vamos fazer uso do seguinte lema.

Lema 7. *Sejam*

$$p_0 = (x_0, 0),$$

$$p_1 = (x_1, y_1),$$

$$p_2 = (x_2, y_2)$$

pontos no plano e r_1, r_2 satisfazendo

$$(I) \quad 0 < r_2 - r_1 \leq r_1 < r_2$$

$$(II) \quad p_0, p_1, p_2 \in R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, r_1^2 < x^2 + y^2 \leq r_2^2\}.$$

Então, se $d(p_0, p_1) = d(p_0, p_2)$, vale $d(p_1, p_2) < 2(r_2 - r_1)$.

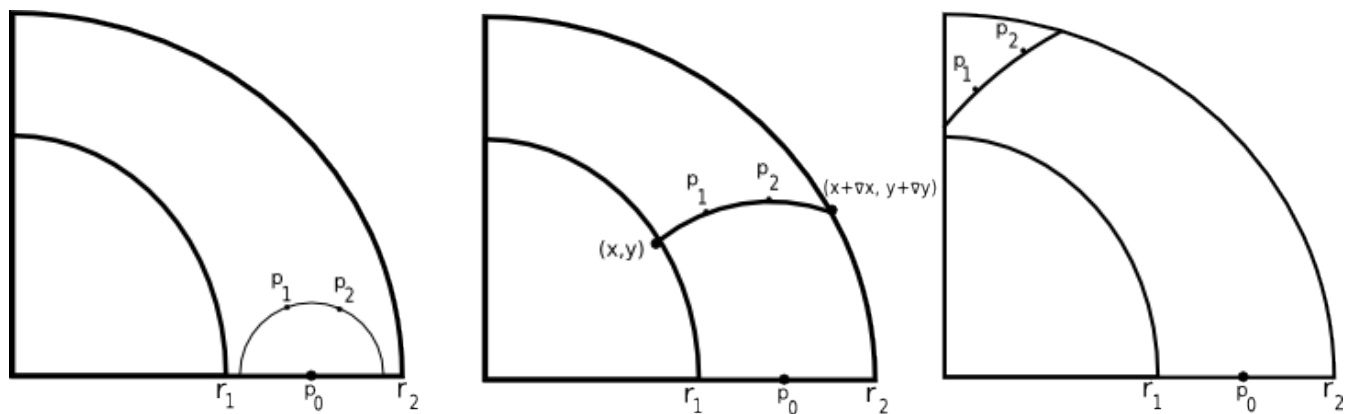


Figura 1

Demonstração. .

Caso 1: $d(p_0, p_1) = d(p_0, p_2) < r_2 - r_1$.

O resultado segue utilizando desigualdade triangular.

Caso 2: $r_2 - r_1 < d(p_0, p_1) = d(p_0, p_2) < r_1$.

Sejam $p_3 = (x, y)$ e $p_4 = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ os pontos marcados na Figura 1. Vamos calcular a distância de p_3 a p_4 , já que $d(p_1, p_2) \leq d(p_3, p_4)$. Observe que valem as seguintes igualdades:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = r_1^2,$$

$$(2) \quad (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 = r_2^2$$

e

$$(3) \quad (d(p_3, p_4))^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Temos

$$\begin{aligned} (d(p_0, p_3))^2 &= (d(p_0, p_4))^2 \\ (x - x_0)^2 + y^2 &= (x + \Delta x - x_0)^2 + (y + \Delta y)^2 \\ 0 &= r_2^2 - r_1^2 - 2x_0\Delta x \\ \Delta x &= \frac{r_2^2 - r_1^2}{2x_0} \end{aligned}$$

Já que $r_1 \leq x_0 \leq r_2$, temos

$$\begin{aligned} \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_2} &\leq \Delta x \leq \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_1} \\ r_2 - r_1 - \frac{(r_2 - r_1)^2}{2r_2} &\leq \Delta x \leq \frac{3}{2}(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Separaremos em dois casos.

Caso 2.1: $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \leq 3(r_2 - r_1)^2$.

Neste caso, o resultado segue observando que

$$(d(p_1, p_2))^2 \leq (d(p_3, p_4))^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \leq 3(r_2 - r_1)^2 < 4(r_2 - r_1)^2.$$

Caso 2.2: $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 > 3(r_2 - r_1)^2$.

Desenvolvendo a equação (2) e utilizando a (1), temos $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = r_2^2 - r_1^2 - 2x\Delta x - 2y\Delta y$.

Portanto $r_2^2 - r_1^2 - 2x\Delta x - 2y\Delta y > 3(r_2 - r_1)^2$, donde concluimos

$$\begin{aligned} \Delta y &< \frac{-3(r_2 - r_1)^2 - 2x\Delta x + r_2^2 - r_1^2}{2y} \\ &< \frac{-3(r_2 - r_1)^2 + r_2^2 - r_1^2 - 2x\left(r_2 - r_1 - \frac{(r_2 - r_1)^2}{2r_2}\right)}{2y} \\ &< \frac{r_2 - r_1}{y} \left(-\frac{3}{2}(r_2 - r_1) + \frac{r_2 + r_1}{2} - x + \frac{x(r_2 - r_1)}{2r_2} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{r_2 - r_1} &< \frac{1}{y} \left(-r_2 + 2r_1 - x + \frac{x(r_2 - r_1)}{2r_2} \right) \\ &= \frac{1}{y} \left(r_1 - x + \frac{r_1 - r_2 + x(r_2 - r_1)}{2r_2} \right) \\ &\leq \frac{r_1 - x}{\sqrt{(r_1 - x)(r_1 + x)}} + \frac{r_1 - r_2 + \frac{r_2 - r_1}{2}}{y} \\ &= \sqrt{\frac{r_1 - x}{r_1 + x}} - \frac{r_2 - r_1}{2y} \\ &< 1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 &\leq \frac{9}{4}(r_2 - r_1)^2 + (r_2 - r_1)^2 \\ &= \frac{13}{4}(r_2 - r_1)^2 \\ &< 4(r_2 - r_1)^2.\end{aligned}$$

□

Demonstração do Teorema 6. Seja $P \subset \mathbb{R}^2$ tal que $|P| = n$. Sejam $X, Y \in P$ um par de pontos de P cuja distância euclidiana é mínima. Ou seja,

$$d(X, Y) = \min\{\Delta(P) \setminus \{0\}\} = 2D.$$

Considere

$$M = \frac{X + Y}{2}$$

como a origem do nosso sistema de coordenadas. Dado $j \in \mathbb{N}$, definimos

$$R'_j = \{(x, y) \in P : jD \leq \sqrt{x^2 + y^2} < (j + 1)D\}$$

Considere os seguintes conjuntos

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} R'_{3j+1}, \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R'_{3j+2}, \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R'_{3j+3}.$$

Observe que, pelo princípio das casas dos pombos, um destes três conjuntos, digamos o último, tem pelo menos $\frac{n-2}{3}$ pontos de P . Podemos supor ainda que pelo menos metade de seus pontos estão acima do eixo horizontal. Definimos

$$R_j = R'_{3j+3}$$

o conjunto destes pontos. Temos

$$\left| \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \right| \geq \frac{n-2}{6}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} D_j &= \{d(p, X) : p \in R_j\} \cup \{d(p, Y) : p \in R_j\} \\ &= \{d_1^j, d_2^j, \dots, d_{k_j}^j\}. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} (3j+2)D &= (3j+3)D - D \leq d(p, 0) - d(0, X) \leq d(p, X) \\ &\leq d(p, 0) + d(0, X) \\ &< (3j+4)D + D \\ &= (3j+5)D \end{aligned}$$

Seja $|D_j| = k_j$ e observe que $|\Delta(P)| \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} k_j$. Definimos

$$A_l^j = \{p \in R_j : d(p, X) = d_l^j\}$$

e

$$B_{l'}^j = \{p \in R_j : d(p, Y) = d_{l'}^j\}.$$

Observe que, para todos $l, l' \in \mathbb{N}$, se $l \neq l'$, então $|A_l^j \cap B_{l'}^j| \leq 1$. Fazendo $|R_j| = n_j$, temos

$$n_j = \left| \bigcup_{l=1}^{k_j} \bigcup_{l'=1}^{k_j} A_l^j \cap B_{l'}^j \right| \leq \sum_{l=1}^{k_j} \sum_{l'=1}^{k_j} |A_l^j \cap B_{l'}^j| \leq k_j^2$$

Portanto, $k_j \geq \sqrt{n_j}$. Logo,

$$\frac{n-2}{6} \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} n_j = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sqrt{n_j} \sqrt{n_j} \leq \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} k_j \right) \max_{j \in \mathbb{N}} \sqrt{n_j} \leq |\Delta(P)| \max_{j \in \mathbb{N}} \sqrt{n_j},$$

donde concluímos

$$|\Delta(P)| \geq \frac{n-2}{6 \max_{j \in \mathbb{N}} \sqrt{n_j}}.$$

Seja $\tilde{j} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_{\tilde{j}} = \max_{j \in \mathbb{N}} n_j.$$

Pelo princípio das casas dos pombos, existe um quadrante E tal que $|E| \geq \frac{n_j}{2}$. Usando o Lema 7, se dois pontos distam igual de p_0 , então $d(p_1, p_2) < 2D$. Isto nos dá um absurdo, pois X, Y são tais que $d(X, Y) = 2D = \min\{\Delta(P) \setminus \{0\}\}$. Portanto, $|\Delta(P)| \geq |\Delta(E)| \geq |E|$ e

$$|\Delta(P)|^2 = \Omega\left(\frac{n^2}{\max n_j}\right)$$

$$|\Delta(P)|^3 = \Omega(n^2)$$

$$|\Delta(P)| = \Omega(n^{2/3}),$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 8 (Székely, 1997). *Temos $m_2(n) = \Omega(n^{4/5})$.*

Teorema 9 (Euler). *Seja G um grafo simples, finito, não-vazio e conexo. Se G é planar, então vale*

$$|V(G)| + |F(G)| - |E(G)| = 2.$$

Aqui provamos uma generalização deste teorema para grafos não-conexos.

Proposição 10. *Seja G um grafo simples, finito e não-vazio. Se G é planar, então vale*

$$|V(G)| + |F(G)| - |E(G)| \geq 2.$$

Demonstração. Suponha que G possua k componentes conexas, digamos G_1, G_2, \dots, G_k . Adicionamos uma aresta conectando as componentes G_i e G_{i+1} , $1 \leq i < k$, de forma a tornar G conexo. Observe que adicionamos $k - 1$ arestas e não criamos faces novas. Desta forma, temos:

$$V(G') = V(G),$$

$$|F(G')| = |F(G)|$$

e

$$|E(G')| = |E(G)| + k - 1,$$

donde segue o resultado utilizando o Teorema 9. □

Proposição 11. *Seja G um grafo simples, finito, não-vazio, conexo e planar. Se $|E(G)| \geq 2$, então vale*

$$3|F(G)| \leq 2|E(G)|.$$

Demonstração. Suponha que precisamos adicionar k arestas em G a fim de transformá-lo em um grafo triangulado, o qual chamaremos de G' . Observe a igualdade

$$\sum_{f \in F(G')} \sum_{a \in E(f)} 1 = \sum_{a \in E(G')} \sum_{g \in F(a)} 1.$$

□

Do lado esquerdo, contamos as arestas que pertencem a cada face de G' , resultando em $3|F(G')|$. Do lado direito, contamos as faces que tocam cada aresta de G' , resultando em $2|E(G')|$. Portanto,

$$3|F(G')| = 2|E(G')|.$$

Como cada aresta que adicionamos em G acrescenta o número de faces em 1 unidade, temos

$$3(|F(G)| + k) = 2(|E(G)| + k),$$

donde concluimos

$$3|F(G)| \leq 2|E(G)|.$$

Podemos ainda provar o seguinte teorema, que nos permitirá nos livrarmos da condição de conexidade.

Proposição 12. *Seja G um grafo simples, finito e não-vazio. Se $|E(G)| \geq 2$, então vale*

$$3|F(G)| \leq 2|E(G)|.$$

Demonstração. Suponha que G possua k componentes conexas, digamos G_1, G_2, \dots, G_k . Se todas possuísem apenas 1 aresta, teríamos o resultado. Portanto, vamos supor que G_1 possui mais de 1 aresta. Desta forma, vale

$$|F(G)| = |F(G_1)| + \sum_{i=2}^k (|F(G_i)| - 1),$$

em que o -1 no somatório decorre do fato de já termos contado a face externa na parcela $|F(G_1)|$.

Logo, utilizando a Proposição 11 e sua generalização, temos

$$\begin{aligned} 3|F(G)| &\leq 2|E(G_1)| + \sum_{i=2}^k 2|E(G_i)| \\ &= 2|E(G)|. \end{aligned}$$

□

Teorema 13. *Seja G um grafo finito planar. Se $|V(G)| \geq 3$, então vale*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Demonstração. Pela Proposição 10, temos

$$|V(G)| + |F(G)| - |E(G)| \geq 2.$$

Observe que, se $|E(G)| < 2$, o teorema é naturalmente verdadeiro. Podemos supor então que $|E(G)| \geq 2$. Pela Proposição 12, temos que $3|F(G)| \leq 2|E(G)|$. Ou seja,

$$2|E(G)| \geq 3|F(G)| \geq 6 - 3|V(G)| + 3|E(G)|,$$

donde segue

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

□

Nos teoremas que seguem, denotamos por $cr(G)$ o número mínimo de cruzamentos em todas as imersões de G no plano.

Teorema 14. *Seja G um grafo finito. Se $|V(G)| \geq 3$, então vale*

$$cr(G) \geq |E(G)| - 3|V(G)| + 6.$$

Demonstração. Tome um desenho de G com exatamente $cr(G)$ cruzamentos e suponha eliminamos todos os cruzamentos removendo k arestas, resultando em um grafo G' . Claramente temos $0 \leq k \leq cr(G)$. Então vale

$$|E(G')| = |E(G)| - k.$$

Pelo Teorema 13, temos

$$|E(G')| \leq 3|V(G')| - 6.$$

Portanto,

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 + k,$$

já que $|V(G')| = |V(G)|$, donde segue

$$k \geq |E(G)| - 3|V(G)| + 6.$$

□

Proposição 15. *Seja G um grafo finito. Então vale*

$$cr(G) \geq |E(G)| - 3|V(G)|.$$

Teorema 16. *Seja G um grafo finito não-vazio. Se $|E(G)| \geq 4|V(G)|$, então vale*

$$cr(G) = \Omega \left(\frac{|E(G)|^3}{|V(G)|^2} \right).$$

Demonstração. Tome $p \in [0, 1]$. Construimos um grafo H_p a partir de G eliminando cada vértice com probabilidade $1 - p$. Desta forma, temos

$$\mathbb{E}[|V(H_p)|] = p|V(G)|$$

$$\mathbb{E}[|E(H_p)|] = p^2|E(G)|$$

$$\mathbb{E}[cr(H_p)] \leq p^4 cr(G).$$

Pelas proposições anteriores,

$$cr(H_p) \geq |E(H_p)| - 3|V(H_p)|.$$

Usando a linearidade da esperança, temos

$$p^4 cr(G) \geq \mathbb{E}[cr(H_p)] \geq p^2|E(G)| - 3p|V(G)|.$$

Portanto,

$$cr(G) \geq \frac{p|E(G)| - 3|V(G)|}{p^3}.$$

Como $|E(G)| \geq 4|V(G)|$, tomamos $p = \frac{4|V(G)|}{|E(G)|} \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} cr(G) &\geq \frac{4|V(G)| - 3|V(G)|}{64 \frac{|V(G)|^3}{|E(G)|^3}} \\ &= \frac{|E(G)|^3}{64|V(G)|^2}. \end{aligned}$$

□

Definição 17. *Seja G um grafo finito e $m \in \mathbb{N}$. Definimos um multigrafo mG obtido à partir de G fazendo m cópias de cada aresta. Ou seja*

$$V(mG) = V(G)$$

$$E(mG) = \bigcup_{i=1}^m E(G).$$

Proposição 18. *Seja G um grafo finito e $m \in \mathbb{N}$. Então vale*

$$cr(mG) = m^2 cr(G).$$

Demonstração.

□

Teorema 19. *Seja G um multigrafo finito sem laços. Sejam $n = |V(G)|$, $e = |E(G)|$ e $m = \max_{a \in E(G)} \text{mul}_{E(G)}(a)$. Se $e \geq 17mn$, então vale*

$$cr(G) = \Omega\left(\frac{e^3}{mn^2}\right).$$

Demonstração.

□

Teorema 20 (Székely, 1997). *Temos $m_2(n) = \Omega(n^{4/5})$.*

Lema 21. *Para todo $K \in \mathbb{N}$, vale*

$$|\{a \in E(G') : \text{mul}_{E(G1)}(a) \geq k\}| \leq \tilde{c} \left(\frac{tn^2}{k^2} + tn \log(n) \right).$$

Demonstração.

□

Proposição 22. *Para todo $i \in \mathbb{N}$, se $2^i \geq 4\sqrt{n}$, então $|L_i| < \frac{2n}{2^i}$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista $i \in \mathbb{N}$ tal que $2^i \geq 4\sqrt{n}$ e $|L_i| \geq \frac{2n}{2^i}$. Seja $L_i = \{r_1, r_2, \dots, r_{|L_i|}\}$. Observe que

$$\begin{aligned} n = |P| &\geq \left| \bigcup_{j=1}^{|L_i|} r_j \cap P \right| \\ &= \left| \bigcup_{j=1}^{|L_i|} r_j \cap P \setminus \bigcup_{l=1}^{j-1} (r_l \cap P) \right| \\ &\geq \sum_{j=1}^{|L_i|} \max\{2^i - (j-1), 0\} \\ &\geq \sum_{j=1}^{2n/2^i} 2^i - (j-1) \\ &= 2^i \frac{2n}{2^i} - \frac{\left(\frac{2n}{2^i} - 1\right) \frac{2n}{2^i}}{2} \\ &= 2n - \left(\frac{2n}{2^i} - 1\right) \\ &\geq 2n - 2 \left(\frac{n}{2^i}\right)^2. \end{aligned}$$

Como supomos $2^i \geq 4\sqrt{n}$, temos

$$\begin{aligned}n &\geq 2n - 2 \left(\frac{n}{2^i} \right)^2 \\ &\geq 2n - 2 \left(\frac{n}{4\sqrt{n}} \right)^2 \\ &= 2n - 2 \left(\frac{n^2}{16n} \right) \\ &= \frac{15}{8}n \\ &> n.\end{aligned}$$

□

2. ALGUNS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

03/04/2012 (Por Yoshiharu Kohayakawa)

2.1. Problema de Sylvester-Gallai.

Suponha que n pontos no plano são tais que quaisquer dois determinam uma reta que contém um terceiro. Como é tal configuração de pontos?

Em \mathbb{R}^3 : Se n pontos em \mathbb{R}^3 são não-coplanares, é verdade que existe um plano que contém exatamente 3 deles?

Dados n pontos no plano, definimos

t_k : quantidade de retas que contém exatamente k dos pontos dados, para $k = 2, 3, \dots$

T_k : quantidade de retas que contém pelo menos k dos pontos dados, para $k = 2, 3, \dots$

Observe que

$$\sum_{k=2}^{\infty} t_k \binom{k}{2} = \binom{n}{2}.$$

Temos, para qualquer $l \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} t_k \binom{k}{2} &\geq t_l \binom{l}{2} + t_{l+1} \binom{l+1}{2} + \dots \\ &\geq T_l \binom{l}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $T_l = O\left(\frac{n^2}{l^2}\right)$.

E quanto a limites inferiores para T_l ?

Exercício 23. *Suponha $n = r^2$ pontos no plano dispostos numa grade $r \times r$. Mostre que $t_k = \Theta\left(\frac{n^2}{k^3}\right)$.*

Teorema 24. *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto infinito de pontos tal que $\forall x, y \in X$, $d(x, y)$ é inteiro. Então X é uma coleção de pontos colineares.*

Demonstração de Sylvester-Gallai. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$. Tome uma reta L e um ponto p fora de L cuja distância $d(p, L)$ seja mínima. □

Mostraremos o seguinte teorema.

Teorema 25 (Beck '83). *Existe $c > 0$ tal que para todo $X \subset \mathbb{R}^2$, com $|X| = n$, vale*

Ou (1) X determina pelo menos cn^2 retas

Ou (2) existe uma reta contendo pelo menos cn pontos de X .

Seja $\mathcal{H} = (V, E)$ um hipergrafo sobre o conjunto de vértices V e com conjunto de hiperarestas $E \subset P(V) = 2^V$. Dizemos que \mathcal{H} é linear/simples se $\forall e, f \in E$, temos $|e \cap f| \leq 1$. Podemos construir o seguinte hipergrafo a partir de X .

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(X) = (X, E),$$

onde

$$E = \{e \subset X : e \text{ é colinear, } |e| \geq 2\}.$$

Definimos

t_k : quantidade de retas (arestas) que contém exatamente k pontos (vértices) de X , para $k = 2, 3, \dots$

T_k : quantidade de retas (arestas) que contém pelo menos k pontos (vértices) de X , para $k = 2, 3, \dots$

Observe que

$$\binom{n}{2} = \sum_{e \in E(\mathcal{H})} \binom{|e|}{2} = \sum_{k \geq 2} t_k \binom{k}{2},$$

donde podemos concluir que se toda reta determinada por X tem $O(1)$ pontos de X , então a quantidade de retas determinadas por X é $\Omega(n^2)$.

Mas, para provar o Teorema 25, precisamos mostrar que se toda reta tem $O(n)$ pontos de X , então a quantidade de retas determinadas por pontos de X é $\Omega(n^2)$.

2.2. Incidências entre pontos e retas. Sejam X um conjunto de pontos e L um conjunto de retas. Uma incidência é um par (x, l) , com $x \in X$ e $l \in L$ tal que $x \in l$.

Denotamos por $I(X, L)$ a quantidade total de incidências entre X e L .

Teorema 26 (Szemerédi & Trotter '83). *Para todo X, L , com $|X| = n$ e $|L| = m$, vale*

$$I(X, L) \leq 4(n^{2/3}m^{2/3} + n + m).$$

Teorema 27 (Szemerédi & Trotter '83). *Para todo $X \subset \mathbb{R}^2$, com $|X| = n$, e $|L| = m$, onde L é o conjunto de retas determinadas por pontos de X , vale*

$$T_k \leq \frac{2^8 n^2}{k^3} + 2^3 \frac{n}{k}.$$

Exercício 28. *Considere a grade $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ e prove que a cota acima é a melhor possível para $2 \leq k \leq \sqrt{n}$.*

2.3. Esboço da prova do Teorema 25.

24/04/2012 (Por Yoshiharu Kohayakawa)

3. CAPACIDADE DE SHANNON DE GRAFOS

15/05/2012 (Por Giulia Maesaka)

Um agente secreto infiltrado em tropas inimigas deseja enviar mensagens às tropas amigas. Para isto, ele dispõe de alguns cachecóis de diferentes cores, cada um representando uma parte da mensagem. Em cada dia ele tem a possibilidade de escolher um cachecol, de forma que ao final de k dias ele terá enviado uma mensagem de comprimento k . Suponha, por exemplo, que ele dispõe de 5 cachecóis. Assim, ao longo de k dias ele poderá enviar 5^k diferentes mensagens.

Imagine, entretanto, que alguns pares de cores sejam impossíveis de distinguir. Por exemplo, os cachecóis vermelho e bege podem parecer iguais às lentes do binóculo amigo. Levando em conta esses pares, qual o número máximo de mensagens distinguíveis que podem ser enviadas em k dias?

A título de ilustração, imagine que os 5 cachecóis são das cores vermelho, bege, verde, azul e roxo, e que cada cor se confunde com suas vizinhas (e o roxo confunde com o vermelho). Em dois dias, o agente pode enviar uma dentre as cinco mensagens abaixo.

	primeiro dia	segundo dia
mensagem 1	vermelho	vermelho
mensagem 2	bege	verde
mensagem 3	roxo	azul
mensagem 4	azul	bege
mensagem 5	verde	roxo

Como podemos facilmente verificar, é possível distinguir cada mensagem das demais. Observe, por exemplo, que as mensagens 1 e 2 se confundem no primeiro dia, mas no segundo dia a distinção entre elas fica evidenciada.

Com base na tabela, ao longo de k dias, para k par, é possível enviar $5^{k/2} = \sqrt{5}^k$ diferentes mensagens sem risco de confusão, enquanto que existem ao todo 5^k possíveis mensagens. A questão que formularemos a seguir é se é possível melhorar o fator $\sqrt{5}$ na quantidade de mensagens distinguíveis.

3.1. Formulação. Considere um *alfabeto* S . Alguns pares de símbolos de S se confundem (são indistinguíveis), e tais pares são expressos por meio de um grafo $G = (S, E)$, onde os pares indistinguíveis de símbolos de S são conectados por arestas em G . No nosso exemplo de cachecóis, o alfabeto corresponde às 5 cores e o grafo correspondente é um circuito de comprimento 5, isto é, um C_5 .

Considere duas mensagens de comprimento k : uma mensagem $a_1a_2 \dots a_k$ e uma mensagem $b_1b_2 \dots b_k$. Estas mensagens se confundem se, e somente se, a_i se confunde com b_i (ou seja, $a_i = b_i$ ou $\{a_i, b_i\} \in E$) para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Seja $\alpha_k(G)$ o número máximo de mensagens de comprimento k que não se confundem. Note que, em particular, $\alpha_1(G)$ é o tamanho de um conjunto independente máximo de G . No nosso exemplo, temos $\alpha_1(C_5) = 2$. Da nossa tabela, concluímos que $\alpha_2(C_5) \geq 5$.

A *capacidade de Shannon* de um grafo G é definida por

$$\Theta(G) := \sup\{\alpha_k(G)^{1/k} : k = 1, 2, \dots\}.$$

Ela representa a quantidade máxima de informação que pode ser transmitida por símbolo. Para k suficientemente grande, o agente pode enviar uma dentre aproximadamente $\Theta(C_5)^k$ possíveis mensagens em k dias. Iremos provar o seguinte teorema.

Teorema 29. *Temos $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$.*

Para isto, vamos observar que $\alpha_k(G)$ pode ser expresso como o tamanho de um conjunto independente máximo de um grafo auxiliar G^k . O conjunto de vértices desse grafo é S^k , ou seja, cada vértice é uma possível mensagem de comprimento k , e dois vértices $a_1a_2 \dots a_k$ e $b_1b_2 \dots b_k$ são conectados por uma aresta se as respectivas mensagens se confundem. Nós chamamos este grafo de *produto forte* de k cópias de G .

Mais formalmente, o produto forte $H \cdot H'$ de dois grafos arbitrários H e H' é assim definido:

$$V(H \cdot H') = V(H) \times V(H'),$$

$$E(H \cdot H') = \{(u, u'), (v, v')\} : \quad (u = v \text{ ou } \{u, v\} \in E(H))$$

e

$$(u' = v' \text{ ou } \{u', v'\} \in E(H')).$$

Vamos provar dois resultados relacionando conjuntos independentes em grafos com certos sistemas de vetores. Seja $H = (V, E)$ um grafo qualquer. Uma *representação ortogonal* de H é uma função $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, para algum n , que atribui um vetor unitário $\rho(v)$ a todo vértice $v \in V(H)$ (isto é, $\|\rho(v)\| = 1$) e tal que vale o seguinte.

Se dois vértices distintos u, v não são conectados por uma aresta, então os vetores correspondentes são ortogonais.

Ou seja, se $\{u, v\} \notin E$, então $\langle \rho(u), \rho(v) \rangle = 0$.

Para mostrar o principal teorema, precisamos introduzir uma interessante representação ortogonal ρ_{LU} do C_5 em \mathbb{R}^3 , conhecida como representação "Lovász umbrella". Imagine um guarda-chuva fechado com cinco hastes de comprimento unitário e cujo cabo central é o vetor $e_1 = (1, 0, 0)$. Agora, abrimos o guarda-chuva lentamente até que os pares de hastes não adjacentes se tornem ortogonais.

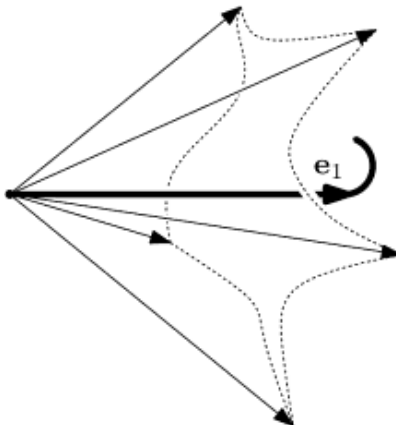


Figura 2

Neste momento, as hastes definem vetores unitários v_1, v_2, \dots, v_5 . Atribuindo o vetor v_i ao vértice i do C_5 , nós obtemos a representação ortogonal ρ_{LU} .

Exercício 30. *Mostre que o produto escalar $\langle v_i, e_1 \rangle$ vale $5^{-1/4}$.*

Como veremos no lema a seguir, toda representação ortogonal de um grafo G fornece um limite superior para $\alpha(G)$.

Lema 31 (Lema A). *Se G é um grafo e ρ é uma representação ortogonal de G , então $\alpha(G) \leq \Theta(G, \rho)$, onde*

$$\Theta(G, \rho) := \max_{v \in V(G)} \frac{1}{\langle \rho(v), e_1 \rangle^2}.$$

Demonstração. Seja $(v_1, v_2, \dots, v_{\alpha(G)})$ um conjunto independente de G . Desta forma, os vetores $(\rho(v_1), \rho(v_2), \dots, \rho(v_{\alpha(G)}))$ são ortogonais. Para $n \geq \alpha(G)$, considere $(V_1, V_2, \dots, V_{\alpha(G)}, V_{\alpha(G)+1}, \dots, V_n)$ uma base de \mathbb{R}^n . Observe que

$$\sum_{i=1}^n \langle V_i, u \rangle^2 = \|u\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha(G)} \langle V_i, u \rangle^2 \leq \|u\|^2.$$

Portanto, temos

$$\sum_{i=1}^{\alpha(G)} \langle V_i, e_1 \rangle^2 \leq 1.$$

Desta forma, existe i_0 tal que

$$\langle V_{i_0}, e_1 \rangle^2 \leq \frac{1}{\alpha(G)}$$

$$\frac{1}{\langle V_{i_0}, e_1 \rangle^2} \geq \alpha(G)$$

$$\Theta(G, \rho) \geq \alpha(G).$$

□

Lema 32 (Lema B). *Dados grafos H_1 e H_2 com representações ortogonais ρ_1 e ρ_2 (respectivamente), temos que $H_1 \cdot H_2$ tem uma representação ortogonal ρ tal que $\Theta(H_1 \cdot H_2, \rho) = \Theta(H_1, \rho_1) \cdot \Theta(H_2, \rho_2)$.*

Demonstração.

□

4. GRAFOS PERFEITOS E A FUNÇÃO Θ DE LOVÁSZ

29/05/2012 (Por Yoshiharu Kohayakawa)

Dado um grafo G , denotamos por $\omega(G)$ o tamanho da maior clique de G e por $\chi(G)$ o menor número de cores tal que é possível colorir os vértices G sem que dois vértices adjacentes possuam a mesma cor.

Claramente, para todo grafo G , temos

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

Definição 33 (Berge). *Um grafo G é dito perfeito se $\chi(G') = \omega(G')$ para todo G' subgrafo induzido de G .*

Conjectura 34 (Berge). *Um grafo G é perfeito se, e somente se, G não contém circuito ímpar ou complemento de circuito ímpar induzidos.*

Teorema 35 (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas '2002). *A conjectura 34 vale.*

4.1. Exemplos de grafos perfeitos.

- Grafos completos;
- Grafo interseção de intervalos na reta;
- Grafo interseção de subárvores de uma árvore.

4.2. Função Θ de Lovász.