SPANNERS EM GRAFOS

HUGO VINICIUS VAZ BRAGA

YOSHIKO WAKABAYASHI
(ORIENTADORA)

1. Spanners em Grafos

Dado um grafo $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de seus vértices e E é o conjunto de suas arestas, e um número real $t \geq 1$, chamado de *fator de dilatação*, um t*-spanner* é um subgrafo gerador H de G tal que:

$$\frac{\mathrm{dist}(u, v, H)}{\mathrm{dist}(u, v, G)} \leq t, \quad \forall\, u, v \in V, \tag{1}$$

onde $\mathrm{dist}(u, v, G)$ denota a distância entre u e v em G.

Problemas sobre spanners surgem em cenários como computação distribuída [3, 8], redes de comunicação [11, 10, 9, 7], robótica [2] e grafos massivos [5, 1, 6]. Em redes de comunicação, a utilização de spanners permite que tabelas de roteamento sejam pequenas. Uma outra justificativa para a adoção de spanners consiste em obter eficiência energética. [10]. Ainda com relação a redes de comunicação, spanners são utilizados na implementação de serviços de diretório, visto que o custo está relacionado ao fator de dilatação (que é garantido pelo spanner). Uma outra aplicação em redes de comunicação consiste na implementação da operação de *broadcast*.

Em sistemas distribuídos, alguns autores perceberam que desenvolver um algoritmo síncrono e utilizar sincronizadores para possibilitar utilizar o algoritmo em ambiente assíncrono é mais eficiente do que desenvolver um algoritmo diretamente para o ambiente assíncrono. Relações entre subgrafo t-spanner e sincronizadores foram descobertas em [8].

Outra aplicação para os spanners correspondem à aproximação da distância em grafos massivos. Tipicamente estes grafos são processados em modelos de *streaming*, caracterizado pela limitação do espaço. Além disso, a informação da distância é importante nestes grafos. Spanners têm sido utilizados neste contexto em decorrência da limitação de espaço e pelo fato de que eles aproximam a distância.

Dentre os vários tipos de de problemas sobre spanners, estamos interessados em estudar problema de otimização sobre eles. Por exemplo, dado um grafo G, qual o menor valor de t para o qual o grafo de entrada admite uma árvore t-spanner? Lembre-se que nos serviços de diretório, o custo está relacionado ao fator de dilatação da árvore. Sendo assim, a minimização deste fator faz sentido. No *problema de árvore t-spanner* [4], o

Instituto de Matemática e Estatística — Universidade de São Paulo — Rua do Matão 1010, CEP 05508–090 São Paulo, SP.
E-mails: `hbraga@ime.usp.br` (H. Braga) e `yw@ime.usp.br` (Y. Wakabayashi).

objetivo é encontrar no grafo de entrada uma árvore geradora H tal que a restrição de dilatação (1) seja satisfeita. Nós nos interessamos em gerar formulações inteiras para este problema (e correlatos), visto que poucos algoritmos exatos existe para os problemas de spanner.

Estamos também interessados em estudar os problemas de complexidade relativos aos spanners. Por exemplo, nada se sabe sobre o problema de árvore 3-spanner. Saber se um grafo admite uma única árvore $t - spanner$ também é passível de ser estudado.

Referências

[1] Kook Jin Ahn, Sudipto Guha, and Andrew McGregor, *Graph sketches: Sparsification, spanners, and subgraphs*, Proceedings of the 31st Symposium on Principles of Database Systems (New York, NY, USA), PODS '12, ACM, 2012, pp. 5–14.

[2] Srinivasa Arikati, Danny Z. Chen, L. Paul Chew, Gautam Das, Michiel Smid, and Christos D Zaroliagis, *Planar spanners and approximate shortest path queries among obstacles in the plane*, Algorithms — ESA '96 (Josep Diaz and Maria Serna, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 1136, Springer Berlin Heidelberg, 1996, pp. 514–528.

[3] Baruch Awerbuch, *Complexity of network synchronization*, J. ACM **32** (1985), no. 4, 804–823.

[4] Leizhen Cai and Derek G. Corneil, *Tree spanners*, SIAM J. Discret. Math. **8** (1995), no. 3, 359–387.

[5] Joan Feigenbaum, Sampath Kannan, Andrew McGregor, Siddharth Suri, and Jian Zhang, *Graph distances in the data-stream model*, SIAM J. Comput. **38** (2008), no. 5, 1709–1727.

[6] Andrew McGregor, *Graph stream algorithms: A survey*, SIGMOD Rec. **43** (2014), no. 1, 9–20.

[7] David Peleg and Eilon Reshef, *A variant of the arrow distributed directory with low average complexity*, Proceedings of the 26th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (London, UK, UK), ICAL '99, Springer-Verlag, 1999, pp. 615–624.

[8] David Peleg and Jeffrey D. Ullman, *An optimal synchronizer for the hypercube*, SIAM J. Comput. **18** (1989), no. 4, 740–747.

[9] David Peleg and Eli Upfal, *A tradeoff between space and efficiency for routing tables*, Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of computing (New York, NY, USA), STOC '88, ACM, 1988, pp. 43–52.

[10] Christian Schindelhauer, Klaus Volbert, and Martin Ziegler, *Geometric spanners with applications in wireless networks*, Comput. Geom. Theory Appl. **36** (2007), no. 3, 197–214.

[11] Mikkel Thorup and Uri Zwick, *Compact routing schemes*, Proceedings of the thirteenth annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures (New York, NY, USA), SPAA '01, ACM, 2001, pp. 1–10.