

Imposturas Intelectuais em Educação Matemática

Daniel V. Tausk

Sumário

Introdução	iv
Capítulo 1. Maria Salett Biembengut	1
1.1. O livro “Número de Ouro e Secção Áurea”	1
Capítulo 2. Nílson José Machado.....	16
2.1. A obscuridade matemática	16
2.2. Sobre as citações a outros autores	28
Apêndice A. Explicações simplificadas para alguns dos concei- tos matemáticos que aparecem no livro.....	33
A.1. As várias estruturas da Matemática.....	33
A.2. Teoria das categorias	41
A.3. Topologia	43
A.4. O número áureo.....	48
Referências Bibliográficas	49

Introdução

O presente texto corresponde a uma versão ainda (muito) preliminar de um livro que terá como objetivo a análise crítica de algumas obras de influentes acadêmicos da área de Educação Matemática, assim como a discussão crítica de algumas idéias que encontram bastante aceitação entre os acadêmicos da referida área (por acadêmico “influyente” quero dizer principalmente aqueles que são influentes no Brasil, embora alguns dos autores aqui criticados sejam também influentes em outros lugares do mundo). O nome “imposturas intelectuais” é inspirado no excelente¹ livro homônimo [9] de Alan Sokal e Jean Bricmont, onde os autores expõe diversos absurdos que circulam entre alguns dos textos escritos pelos assim chamados *filósofos pós-modernos* (“pós-moderno” aqui deve ser entendido no sentido explicado em [9, pg. 26]). Entre os absurdos expostos em [9], encontram-se principalmente o abuso da linguagem científica por conceituados (em alguns círculos, ao menos) intelectuais como Jacques Lacan, Julia Kristeva, Luce Irigaray, Bruno Latour, Jean Baudrillard, Gilles Deleuze, Félix Guattari e Paul Virilio, assim como a adoção por alguns de seus seguidores (especialmente no mundo anglófono) de certas posições filosóficas bastante degeneradas, que pregam, entre outras coisas, radicais visões relativistas e subjetivistas (chegando a situações extremas, em que se nega quase que completamente a existência de qualquer tipo de realidade objetiva ou qualquer possibilidade de se classificar crenças quanto à sua plausibilidade); por “abuso” da linguagem científica entende-se aqui não apenas o fato de que tais autores tenham cometido alguns erros técnicos, mas que os mesmos tenham escrito textos com afirmações completamente absurdas ou desprovidas de qualquer sentido, utilizando a linguagem científica (geralmente da Matemática e da Física) em contextos em que a possibilidade de aplicação das idéias por trás dessa linguagem é completamente fantasiosa (ou, no mínimo, de natureza *extremamente* especulativa). Durante meu trabalho de investigação (ainda em estágio inicial), percebi que algumas das filosofias degeneradas criticadas por Sokal e Bricmont têm tido alguma influência ao menos sobre as idéias de alguns influentes acadêmicos da área de Educação Matemática; veremos (Seção 2.1) que o abuso da linguagem científica também é uma característica de parte das obras de alguns autores que serão analisados aqui (mas, admito eu, num “nível de absurdo” menor do que aquele que se vê nos autores criticados por Sokal e Bricmont).

¹Veja também a divertida resenha de [9] escrita por Richard Dawkins ([4, Seção I.7]) e o site <http://elsewhere.org/cgi-bin/postmodern> onde se pode encontrar um gerador aleatório de textos no estilo pós-moderno. Dawkins escreve, provavelmente brincando um pouco ([4, pgs. 99,100]): “*Visite o gerador pós-modernista. Ele é uma fonte literalmente infinita de baboseiras sintaticamente corretas geradas de modo aleatório que se diferenciam do verdadeiro discurso pós-modernista somente pelo fato de que são mais divertidas de se ler. Você pode gerar milhares de artigos por dia, cada um deles inédito e pronto para a publicação, incluindo as notas de rodapé numeradas. Os manuscritos devem ser submetidos à “Comissão Editorial” do Social Text, em três cópias com espaço duplo.*”

Não só o tema do presente trabalho é inspirado pela obra de Sokal e Bricmont, mas também, em parte, o estilo de exposição: alguns capítulos são dedicados à análise de autores específicos e outros à algumas discussões gerais sobre filosofia da ciência e (principalmente, no nosso caso) da Matemática (**no momento, o presente texto contém apenas uma versão preliminar do que será o capítulo sobre Nílson José Machado e do que será o capítulo sobre Maria Salett Biembengut**). No Apêndice A, fazemos um esforço para explicar em linguagem simplificada (mas não muito) alguns dos principais conceitos matemáticos que aparecem no restante do livro (dando a este livro também um caráter “divulgação da ciência”). Além do livro de Sokal e Bricmont, o presente trabalho também encontra inspiração no livro [3] de Nuno Crato (atual presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática) no qual o autor põe em evidência as más influências ao sistema educacional português causadas pelo que ele chama de “pedagogia romântica”. Observamos também que diversas das idéias distorcidas criticadas por Crato também parecem recorrentes entre alguns educadores brasileiros.

Mas, quais são (e quais não são) os objetivos do presente texto? Respondemos nos itens a seguir.

- *O texto não é um ataque generalizado à comunidade acadêmica de Educação, nem mesmo à comunidade acadêmica de Educação Matemática.*

Talvez algumas pessoas acreditem que há algo de *intrinsecamente* errado com a idéia de se estudar Educação Matemática, mas esse não é *de modo algum* o meu ponto de vista. Na verdade, justamente o meu entendimento de que o estudo de Educação Matemática é de grande importância é uma das motivações para que eu escreva esse livro.

- *O texto pretende desmistificar o mito do especialista.*

Muitas vezes se ouve por aí em notícias de jornal que determinado projeto pedagógico foi preparado com o auxílio de diversos especialistas. Mas quais especialistas? Minha esperança é a de que, após a leitura deste livro, o leitor encare notícias como essa com maior ceticismo, procurando informar-se sobre exatamente o que está acontecendo e usar o seu próprio senso crítico, sem confiar às cegas no argumento da autoridade.

- *O texto não é uma crítica generalizada às metodologias das ciências humanas, nem ao estilo de escrita utilizado pelos acadêmicos de tais ciências.*

De fato, evidentemente não espero que todos os textos acadêmicos de todas as áreas sejam escritos seguindo os padrões de rigor lógico e objetividade que aparecem nos textos técnicos de

Matemática². É perfeitamente normal que áreas do conhecimento diferentes utilizem metodologias de pesquisa diferentes e adotem estilos diferentes de exposição. No entanto, acredito que certas normas de conduta gerais devem ser adotadas por qualquer indivíduo que se proponha a estudar algum tipo de problema, em qualquer área do conhecimento; entre essas normas, incluo o não recurso a argumentos falaciosos e o não recurso a falsas erudições interdisciplinares, quando as mesmas visam apenas impressionar e intimidar leitores leigos.

Um trabalho como o que está a se realizar aqui obviamente atrairá uma quantidade enorme de críticas sobre si; antes mesmo que as mesmas apareçam, acho que vale a pena registrar aqui algumas respostas.

- *É anti-ético (ou inapropriado) atacar colegas do meio acadêmico dessa forma.*

Muito pelo contrário. Faria até mais sentido declarar-se inapropriado o silêncio de um acadêmico frente às visíveis imposturas intelectuais de seus colegas. Por exemplo, se você sabe a respeito de um médico charlatão, não seria correto denunciá-lo? (note que *não* estou dizendo que as imposturas criticadas por esse livro devem ser comparadas as de um médico charlatão).

- *Mas quem é você para julgar?*

Sou apenas um matemático profissional interessado em questões ligadas à educação, que resolveu investigar o tema. Declaro que rejeito argumentos baseados unicamente em autoridade³ (ou falta dela). Acredito que o leitor que *verdadeiramente* possui senso crítico pode analisar o *conteúdo* e as *idéias* deste texto, sem se preocupar com sua autoria (uma afirmação verdadeira torna-se menos verdadeira se for acidentalmente digitada por um macaco que pula em cima de um teclado de computador?).

- *Mas não é possível que os textos que você critica tenham significados profundos que estão além da sua compreensão?*

Tudo *é possível*, em princípio (é possível, por exemplo, que você, leitor, não esteja realmente lendo este texto, que o mesmo

²Também não é o caso que a existência desse rigor lógico e objetividade nos textos técnicos de Matemática signifique que os matemáticos sejam “melhores” do que os outros acadêmicos. Trata-se apenas da natureza da Matemática.

³Não significa que eu não acredite que faz sentido dar crédito a indivíduos que refletiram ou pesquisaram muito sobre um tema; na verdade, faz bastante sentido. Apenas afirmo que o ceticismo com respeito à opinião de especialistas não pode ser completamente rejeitado, assim como um argumento não pode ser simplesmente ignorado apenas por vir de um não especialista.

não passe de uma alucinação; é possível também que sejamos todos loucos e que a sensação de coerência que vemos no mundo seja um dos sintomas dessa loucura⁴). Uma crítica como essa, para ser realmente levada a sério, deveria vir acompanhada de algumas indicações plausíveis de quais sejam tais significados profundos. De forma similar, argumentos colocados através de questões do tipo “mas não pode ser que se trate de algo que você nunca pensou antes?” ou “mas não pode ser que você esteja errado?” são irrefutáveis, porém sua fraqueza está na sua generalidade: argumentos assim servem para atacar indiscriminadamente *quaisquer* teses que um indivíduo deseje defender, seja lá quais forem os argumentos usados nessa defesa.

- *Você é contra a liberdade de pensamento ou de expressão?*

De modo algum. Não estou dizendo que os autores que critico não têm o direito de dizer (ou pensar) o que bem quiserem. Mas não se deve confundir liberdade de pensamento ou expressão com a filosofia do “qualquer coisa serve” ou da completa ausência de controle de qualidade. Seria estranho assumir que nunca se pode dizer (evidentemente, correndo algum risco de errar, como sempre é o caso na vida) que determinada afirmação feita por um autor é desprovida de sentido, errada ou mesmo absurda.

- *Críticas como a sua, caso levadas a sério, acarretam no risco de que boas idéias sejam jogadas fora.*

É verdade que *algum risco* de se jogar fora boas idéias realmente existe quando se opta por descartar algo. Mas essa questão me faz pensar num indivíduo que nunca joga nada fora com medo de se desfazer de algo de valor e acaba vivendo cercado de entulho. O argumento genérico do “risco de se jogar fora alguma boa idéia”, quando não acompanhado de outro argumento mais específico, contém uma defesa implícita da filosofia do “qualquer coisa serve” ou da completa ausência de controle de qualidade. Para que o que estou dizendo seja melhor compreendido, sugiro ao leitor que considere o seguinte experimento mental. Suponha que convidemos vários proeminentes intelectuais de diversas áreas do conhecimento para organizarem uma lista de 100 perguntas ainda sem resposta que sejam de grande importância para a humanidade; suponha que essas perguntas admitam todas uma resposta do tipo “sim” ou “não”. Agora escrevemos as 100 perguntas numa folha de papel; pegamos uma moeda honesta (em que “cara” e “coroa” sejam equiprováveis) e jogamo-la 100 vezes, uma vez para cada

⁴Minha posição sobre isso é a de que não leva a nada alimentar ceticismos radicais que nunca poderão ser aliviados; sempre há algum tipo de “incerteza residual” que paira sobre todo e qualquer tipo de crença.

pergunta. Para cada “cara” escrevemos “sim” ao lado da pergunta correspondente e para cada “coroa” escrevemos “não”. O que se obtém assim? Alguns cálculos simples⁵ mostram que a probabilidade de que um procedimento desse tipo produza ao menos 50 respostas corretas é de cerca de 54%. A probabilidade de termos ao menos 40 respostas corretas é de mais de 98% e a probabilidade de termos ao menos 20 respostas corretas já é *praticamente igual a 100%* (essa probabilidade é maior do que a de se perder quando se joga uma vez na mega-sena!). Temos então uma lista de perguntas muito importantes, ao lado de respostas, sendo que quase certamente temos ao menos 20 respostas corretas! Mas e daí? De que valem essas respostas? Absolutamente nada! É quase certo que ao menos 20 respostas estejam corretas, mas não temos a mínima idéia sobre quais são corretas e quais são erradas. Conhecimento não é apenas um amontoado de idéias aleatórias; sem algum controle de qualidade sobre as idéias, seria quase como se não tivéssemos idéia nenhuma.

- *Os textos que você critica têm valor literário, independentemente da veracidade das afirmações e da qualidade da argumentação lógica presente neles; tais textos servem de inspiração para professores e para indivíduos que devem tomar decisões sobre políticas educacionais.*

Admito realmente a possibilidade de que tais textos tenham valor literário (não tenho nenhuma aptidão para fazer esse tipo de julgamento) e que, como espécie de obras de arte, sejam fontes de inspiração para alguns de seus leitores. No entanto, considere a seguinte argumentação: imagine que um grande biólogo declare que teve suas melhores idéias enquanto ouvia determinado disco de Jazz, que considera fonte de grande inspiração (apesar da aparente ausência de qualquer conexão entre Jazz e Biologia, admito que a mente humana é complexa e que algo desse tipo poderia bem ocorrer). Vemos então que os artistas por trás do disco contribuíram, com sua arte, para o desenvolvimento da pesquisa em Biologia; porém, *não faz sentido* acreditar que tais músicos são especialistas em Biologia ou perguntar a opinião deles sobre, digamos, a melhor forma de conduzir determinado experimento envolvendo membranas de células. Assim, se os autores que critico são realmente grandes artistas, também não faz sentido (baseando-se unicamente nesse dado) que os consideremos especialistas em educação e consultemo-los na hora de decidir sobre políticas educacionais, por exemplo.

⁵Usando uma distribuição binomial.

- *Já que você sabe tudo e critica todo mundo, por que não escreve algo melhor para por no lugar?*

Eu não *sei tudo* e eu não critico *todo mundo*. Eu sei sobre *algumas coisas* e eu critico *alguns autores* (ou alguns abusos praticados por alguns autores). Quanto a questão de “escrever algo melhor para por no lugar”, me parece um tanto estranho que alguém ache que para que se possa criticar uma obra seja necessário antes produzir outra melhor. Por exemplo, se um médico deseja denunciar um curandeiro charlatão que se diz capaz de curar determinado tipo de câncer, seria necessário que esse médico primeiro descobrisse uma *verdadeira* cura para aquele tipo de câncer?

CAPÍTULO 1

Maria Salett Biembengut

Maria Salett Biembengut é professora do Departamento de Matemática da Universidade Regional de Blumenau (FURB) desde 1990. Segundo seu Currículo Lattes (que pode ser encontrado através do *site* do CNPq), certificado pela própria Biembengut em 20/10/2006:

“Maria Salett Biembengut concluiu o pós-doutoramento em educação pela Universidade de São Paulo - USP em 2003. Atualmente é professora da Universidade Regional de Blumenau - FURB e do Centro Universitário Diocesano do Sul do Paraná - UNICS. Publicou 46 artigos em periódicos especializados e 74 trabalhos em anais de eventos. Possui 6 capítulos de livros e 4 livros publicados. Participou do desenvolvimento de 127 produtos tecnológicos. Participou de 43 eventos no exterior e 31 no Brasil. Orientou 32 dissertações de mestrado, além de ter orientado 7 trabalhos de iniciação científica e 2 trabalhos de conclusão de cursos nas áreas de Educação, Matemática e Ecologia. Recebeu 2 prêmios: Mulher do Ano e Finalista do Prêmio Jabuti. Atua na área de Matemática, com ênfase em Modelagem Matemática. Em suas atividades profissionais interagiu com 37 colaboradores em co-autorias de trabalhos científicos.”

Também no Currículo Lattes de Biembengut, vemos que a mesma é consultora *ad hoc* do CNPq e da CAPES, foi Presidente do Comitê Interamericano de Educação Matemática, Membro do Comitê Científico do ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), Membro do Comitê Internacional de Didática da Matemática do Cone Sul, Coordenadora da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática, Vice-Presidente do CIAEM (Comitê Interamericano de Educação Matemática) e Presidente da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática).

1.1. O livro “Número de Ouro e Secção Áurea”

“Trata-se de uma obra sobre um tema matemático de relevância, escrito com competência matemática e com elevado enfoque humanístico. O tema é um dos mais fascinantes da história da humanidade, não restrito à Matemática.

O livro tem um tratamento adequado de Matemática e de História, com belas ilustrações que vão da História da Arte à Pecuária, mostrando assim a abrangência da abordagem feita pela autora que dá inúmeros exemplos e ilustrações interessantes, muitas vezes até surpreendentes para o leitor.

Procurando tornar seu livro fácil e atraente, a autora não se deixa levar para o vulgar e trivial. Mantém um tratamento matemático rigoroso e consegue relacionar o tema com tópicos centrais dos programas atuais. Temos assim um livro de grande originalidade e qualidade. Tenho visto inúmeros livros sobre o assunto, mas não me lembro de outro tão bem organizado. Este é um exemplo de livros que fazem bem para a Educação Matemática: interessante, rigoroso, culturalmente contextualizado.

Acredito ser esse o caminho para resgatar a importância da Matemática nos programas escolares. Sem dúvida, a Matemática tem um valor utilitário. Mas justamente a sua importância como um instrumento em praticamente todas as áreas do conhecimento, principalmente nas ciências, fazem com que muito do conteúdo matemático que comparece nos currículos seja tratado de modo mais focalizado e com melhor aceitação quando integrado nas demais disciplinas.

...

Salett lida com a situação enfrentando justamente esses pontos e propõe um tema interessante, central e oferece um tratamento simples e ao mesmo tempo apresentando desafios aos alunos mais curiosos e interessados. A maneira como apresenta esse tema, tão reconhecido em todos os ramos da Matemática, torna o livro acessível a alunos de 1º e 2º graus e igualmente adequado para alunos universitários. A autora apresenta, com clareza de exposição e precisão adequada assuntos interessantes e muito centrais na História da Matemática.

O livro pode ser usado como um texto auxiliar em cursos de Matemática, de Ciências em geral e de História. Embora o tema ofereça aspectos matemáticos difíceis e alguns ainda não completamente elucidados, sendo uma área de pesquisa ativa, o tratamento dado pela autora é absolutamente acessível. A exposição muito boa, clara, permite que o leitor perceba a força da Matemática e ao mesmo tempo sua beleza.

Esta é uma contribuição efetiva para a melhoria da Educação no país. Sem dúvida estimulará muitos jovens, e igualmente adultos que um dia se sentiram frustrados com a Matemática, a procurar conhecer mais e melhor essa ciência, tão universal e antiga quanto a própria humanidade.”

O texto acima é constituído por trechos extraídos da apresentação escrita por Ubiratan D’Ambrósio¹ ao livro “Número de Ouro e Secção Áurea:

¹O Prof. Ubiratan D’Ambrósio recebeu em 2005 da *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) a medalha Felix Klein (um prêmio internacional da área de Educação Matemática). No site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática encontra-se o seguinte comentário: “Foi divulgado nesta segunda-feira, 03 de abril, o resultado dos prêmios do ICMI-2005. O professor Ubiratan D’Ambrósio, sócio fundador da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, foi agraciado com o Prêmio Felix Klein por sua importante contribuição ao desenvolvimento da Educação Matemática em todo o mundo.” e no site do ICMI encontra-se esse outro comentário: “The Felix Klein Medal for 2005 is awarded to Ubiratan D’Ambrosio, Emeritus Professor at UNICAMP, in Brasil. This distinction acknowledges the role Ubiratan D’Ambrosio has played in the

Considerações e Sugestões para a Sala de Aula”, escrito por Maria Salett Biembengut² ([1]). No que segue, farei uma análise detalhada de vários trechos desse livro; os trechos analisados correspondem a uma parte bastante significativa do mesmo. Algumas das minhas críticas podem ser encaradas como preciosismos³, mas outras (como as que aparecem nas Subseções 1.1.7 e 1.1.8) certamente apontam para erros grosseiros e graves.

O *número de ouro* (ou *número áureo*) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ será denotado, como em [1], pela letra grega maiúscula Φ (mais detalhes sobre o número áureo podem ser encontrados na Seção A.4 do Apêndice A).

1.1.1. Confundindo números irracionais com suas aproximações racionais. Um autor de livros didáticos de matemática elementar preocupado com detalhes finos possivelmente questionaria se é uma boa idéia escrever em seus livros uma igualdade como:

$$\frac{1}{\Phi} = 0,618\dots;$$

de fato, o número $\frac{1}{\Phi}$ é irracional e um aluno poderia obter da fórmula acima a impressão errada de que 0,618... representa uma dízima periódica (que denota necessariamente um número racional). O que certamente não seria razoável escrever é:

$$\frac{1}{\Phi} = 0,618$$

sem as reticências, deliberadamente confundindo o número irracional $\frac{1}{\Phi}$ com sua aproximação racional 0,618. Se um autor deseja escrever igualdades desse tipo, deveria *no mínimo* deixar por escrito em seu livro didático uma frase explicitando que serão cometidos alguns abusos de notação (com o intuito de simplificar a exposição, por exemplo).

Em seu livro [1], Biembengut diversas vezes faz confusões entre números irracionais e suas aproximações racionais. Nenhuma frase avisando o leitor sobre abusos de notação pode ser encontrada no livro. Por exemplo, na página 16, encontramos as igualdades:

development of mathematics education as a field of research and development throughout the world, above all in Latin America. It also recognises Ubiratan D'Ambrosio's pioneering role in the development of research perspectives which are sensitive to the characteristics of social, cultural, and historical contexts in which the teaching and learning of mathematics take place, as well as his insistence on providing quality mathematics education to all, not just to a privileged segment of society."

²A autora indica no seu Currículo Lattes que esse livro é uma das obras mais importantes da sua carreira.

³Como trata-se de um livro que poderá ser usado para *ensino em nível elementar*, acredito que o cuidado com pequenos detalhes é importante. Num livro de matemática mais avançada, destinado a ser lido por especialistas, certas imprecisões não fariam muito mal (supondo, é claro, que não acarretem em erros nos resultados centrais); de fato, não haveria nesse caso risco de que os leitores assimilassem conceitos errados, pois já seriam matematicamente maduros o suficiente para reconhecer os erros.

$$\frac{\text{med}(\text{AB})}{\text{med}(\text{AC})} = \frac{\text{segmento todo}}{\text{parte maior}} = \frac{1}{0,618} =$$

1,618... Número de Ouro

Note que faltam as reticências em 0,618, o que não deve espantar ninguém; obviamente, pode tratar-se de um erro tipográfico (o livro contém vários). Mas o erro é recorrente. Na mesma página, encontramos a seguinte afirmação:

“O Número 0,618034 chamado: *Secção Áurea* é o inverso do número de ouro.”

Novamente, faltam as reticências (e a aproximação racional escolhida muda, sem aparente motivo). Na página 17, encontra-se a igualdade:

$$(1,6180399) \cdot (0,6180399) = 1$$

sendo que o resultado correto do produto que aparece do lado esquerdo da igualdade é 1,00001321799201. Na página 24, encontramos a igualdade:

$$\overline{BC} = \overline{AD} = 3,1 = 5 \cdot (0,618)$$

sendo que o resultado correto do produto $5 \cdot (0,618)$ é 3,09. Não parece uma boa idéia escrever igualdades falsas num livro didático de matemática, sem sequer mencionar que estão sendo feitas aproximações (observe que [1] não está sequer respeitando as convenções usuais para lidar com números aproximados em medidas experimentais⁴). Na página 26 encontramos também a afirmação:

$$“Se x = 5 então S = 5 \cdot \Phi^2 = 13,09”,$$

que está errada, já que $5\Phi^2$ é um número irracional. Poderia se dizer que estou sendo precioso demais com detalhes na minha crítica. No entanto, problemas mais graves de confusão entre números irracionais e suas aproximações racionais podem ser encontrados no livro. Por exemplo, na página 17, a autora afirma (corretamente) que $\Phi + 1 = \Phi^2$. Seria bem fácil verificar essa igualdade usando um argumento correto, partindo do fato que $\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. No entanto, tal verificação não aparece no livro; em vez disso, encontramos logo abaixo da fórmula $\Phi + 1 = \Phi^2$ as igualdades:

$$(1 + 1,618 \dots) = (1,618)^2 = 2,618 \dots$$

⁴Por exemplo, se os números 1,6180399 e 0,6180399 são escritos com precisão de sete casas decimais, seria razoável ao menos escrever o lado direito da igualdade com a mesma precisão; mas note que o verdadeiro resultado do produto desses números difere de 1 já na quinta casa decimal. Similarmente, se 0,618 é escrito com três casas decimais, o resultado do produto $5 \cdot (0,618)$ deveria, pelo menos, ser escrito com três casas decimais. Note que o resultado correto 3,09 e o resultado usado 3,1 diferem nas duas primeiras casas decimais.

Além da falta das reticências⁵ em $(1,618)^2$, é importante observar que essas igualdades *de modo algum demonstram* que $\Phi + 1 = \Phi^2$. Na mesma página, a autora afirma (corretamente) que:

“Subtraindo 1 de Φ , obtém-se o seu inverso”.

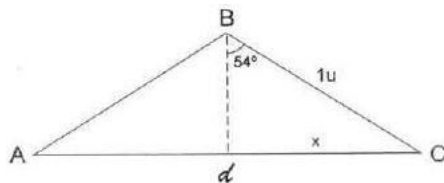
Logo abaixo, encontramos a igualdade $\Phi - 1 = 1$ (obviamente um erro tipográfico, deveria ser $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$) e ainda:

$$(1,618\dots - 1) = \frac{1}{1,618} = (0,618\dots)$$

Novamente, notamos a falta das reticências no lugar apropriado e o fato que essas igualdades *não demonstram* que $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$. Logo a seguir, na página 18, a autora comete deslizes similares, ao “mostrar” que $\Phi^2 - 2 = \frac{1}{\Phi}$. É verdade que a autora não afirma que essas igualdades usando aproximações racionais servem como demonstração das igualdades envolvendo o número áureo Φ ; no entanto, as demonstrações corretas das igualdades envolvendo Φ (ou mesmo um *aviso* de que os cálculos aproximados não servem como demonstrações) não aparecem no livro. Um leitor principiante poderia talvez ser levado a acreditar que os cálculos aproximados são de fato demonstrações corretas das propriedades de Φ . Um problema mais sério aparece na página 30:

“ $x = 0,8009\dots(1u) \Rightarrow d = 2 \cdot (0,8009) = \Phi$
 portanto, para um pentágono de lado $= K$,
 a diagonal d é $K \cdot \Phi$ ”

No contexto, estava se considerando a figura:



onde AB e BC são lados adjacentes de um pentágono regular. Ao lado da figura o livro apresenta a igualdade (correta):

$$\text{sen } 54^\circ = \frac{x}{1u};$$

a letra u denota uma unidade de medida. O número racional 0,8009 que aparece no texto é uma aproximação racional para o seno de 54 graus (na verdade, temos aí mais um erro tipográfico: a aproximação racional correta para $\text{sen } 54^\circ$ com três casas decimais é 0,809, mas isso não vem ao caso). É realmente verdade que:

$$2 \cdot \text{sen } 54^\circ = \Phi,$$

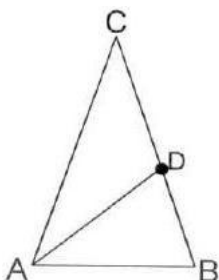
⁵Note também que $(1,618)^2 = 2,617924$. Além do mais, assumindo que a falta de reticências é um erro tipográfico, ficaríamos ainda com a pergunta: como calcular $(1,618\dots)^2$?

mas isso não é de modo algum trivial. A autora parece estar insinuando que a igualdade $2 \cdot \sin 54^\circ = \Phi$ é *demonstrada* pelos cálculos apresentados com as aproximações racionais, o que certamente não é verdade. O leitor poderia ficar ainda mais confuso, já que não aparece no livro nenhuma explicação sobre a origem do número 0,8009 (seria uma aproximação de $\sin 54^\circ$ encontrada numa tabela trigonométrica ou obtida usando uma calculadora, por exemplo?). A autora sequer menciona a possibilidade de se fazer uma demonstração correta da relação entre $\sin 54^\circ$ e Φ ou o fato de que os cálculos aproximados que aparecem no livro serviriam na melhor hipótese para que o leitor formulasse uma conjectura sobre a relação entre $\sin 54^\circ$ e Φ .

1.1.2. Triângulo de ouro ou sublime. Na seção intitulada “Triângulo de Ouro ou Sublime” ([1, pg. 19]), a autora define um *triângulo de ouro* como sendo um triângulo isósceles (isto é, com dois lados congruentes) de lados a, x, x tal que $a = \frac{1}{\Phi} \cdot x$. Logo após essa definição (explicada de modo informal), encontramos a frase:

“Utilizando régua e compasso, façamos um triângulo áureo, ABC :”

Poderia se esperar que após essa frase fosse encontrada uma descrição da construção do triângulo áureo (ou de ouro) com régua e compasso. Em vez disso, encontra-se a figura:



ao lado dos dizeres:

$$\overline{AB} = \frac{1}{\Phi} \cdot \overline{AC}$$

Marcando um ponto D em \overline{BC} tal que $\overline{AB} = \overline{AD}$, pode-se verificar que $\overline{BD} = 1/\Phi(\overline{AB})$ ou seja o triângulo BAD é áureo.”

Seria fácil para o leitor (com um pouco de experiência⁶ em geometria plana) verificar sozinho que o novo triângulo isósceles BAD é áureo; de fato, é fácil ver que o triângulo BAD é semelhante ao triângulo ACB , já que o ângulo no vértice B é comum a ambos e os dois triângulos são isósceles.

⁶É um tanto incoerente, no entanto, que na página 14 a autora se preocupe em explicar com cuidado uma passagem bem mais elementar, a saber, a passagem de $\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}$ para $1(1-a) = a^2$ (fala-se em “Propriedade Fundamental da Proporção” para justificá-la). Na página 15 a autora apresenta uma resolução passo a passo da equação de segundo grau $a^2 + a - 1 = 0$; também na página 59 aparece uma resolução passo a passo de uma equação de segundo grau.

Será que a autora imaginava que o leitor deveria pensar no argumento de semelhança de triângulos por si próprio? Voltaremos a esse assunto logo adiante.

A autora continua agora sua exposição iterando o processo de construir triângulos áureos encaixados um dentro do outro; depois de alguns passos chega-se, na página 21, à seguinte conclusão:

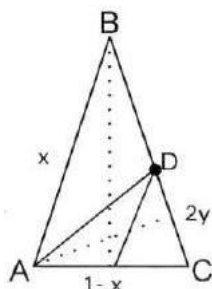
“Assim, por recorrência, podemos dizer que a base do *enésimo* triângulo áureo será:

$$B_n = \left(\frac{1}{\Phi^n}\right) \cdot AC”.$$

A conclusão é correta. O que me parece estranho é que o assunto simplesmente morra nessa conclusão, sem que se chegue a alguma outra mais interessante. Imediatamente após essas considerações, encontramos a frase:

“Outra maneira de verificar:”

Mas verificar o que? Olhando as considerações que seguem, vemos que a autora vai agora apresentar uma demonstração da afirmação de que o triângulo isósceles BAD (construído dentro do triângulo áureo ABC) é áureo. É inapropriado falar em “outra maneira de verificar”, já que essa é a *primeira vez* que aparece no texto uma verificação de que o triângulo BAD é áureo (estaria a autora falando em “outra maneira” pois está contando uma suposta verificação que o leitor teria feito sozinho?). A verificação de que o triângulo BAD é áureo começa pela figura:



Não há nenhuma explicação sobre as medidas x e $1 - x$ que aparecem nos lados AB e AC do triângulo (um leitor com um pouco de experiência perceberá rapidamente que não há perda de generalidade em supor que a soma das medidas de AB e AC é igual a 1, mas talvez isso não seja tão evidente para um leitor iniciante). Não quero aborrecer o meu leitor reproduzindo todas as passagens da verificação feita em [1, pgs. 21,22] de que o triângulo BAD é áureo⁷. Direi apenas que essa verificação usa trigonometria e uma

⁷Note que as letras nos vértices mudaram de uma figura para outra. O velho triângulo BAD é agora o triângulo CAD . O novo triângulo BAD também pode ser considerado áureo, porém num sentido um pouquinho diferente daquele definido pela autora: a medida dos lados congruentes é igual a $\frac{1}{\Phi}$ vezes a medida do outro lado, enquanto que na definição original da autora o triângulo só seria chamado áureo se a medida dos lados congruentes fosse igual a Φ vezes a medida do outro lado.

seqüência de várias manipulações algébricas (nem sempre muito claras, na minha opinião). O argumento simples e elegante (que resolveria o problema em uma linha) usando semelhança de triângulos nunca é sequer mencionado no livro.

1.1.3. Retângulo áureo. A seção intitulada “Retângulo Áureo” ([1, pg. 23]) começa com a seguinte frase:

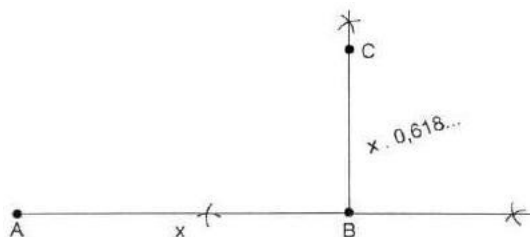
“O retângulo áureo pode ser assim construído:”

Imagina-se que o que vem a seguir seria, por exemplo, uma construção com régua e compasso. Mas em vez disso, encontra-se o seguinte:

“a) façamos um segmento \overline{AB} , com medida X , qualquer;”

Ok. E agora?

“b) traçando uma perpendicular em B tal que a medida seja 0,618, do lado x , isto é:”



É um pouco estranho chamar de “construção” em geometria um procedimento em que se fazem cálculos aproximados e depois marcam-se as medidas calculadas na figura usando-se a escala de uma régua⁸. Note que a autora usa 0,618 (sem reticências) na frase que precede a figura e 0,618... (com reticências) na figura (as reticências aparecem de novo numa figura subsequente). Se devemos entender 0,618... (com reticências) em todos os casos, não seria realmente possível usar a régua para fazer as medidas; por outro lado, se devemos entender 0,618 (sem reticências) em todos os casos, a autora deveria mencionar que a construção é aproximada.

Na verdade, não é difícil construir um retângulo áureo usando apenas régua e compasso (uma construção *exata*, ou melhor, com exatidão limitada apenas pelos instrumentos). Uma descrição correta (mas sem as correspondentes justificativas) dessa construção aparece mais adiante em [1, pgs. 27, 28]. Essa construção correta é introduzida pela obscura frase:

⁸A autora indica na figura (note os pequenos arcos de círculo) que está usando compasso para determinar a perpendicular BC à reta AB . Se a intenção é usar régua e compasso, poderia se fazer a construção *toda* usando *só* régua e compasso, sem cálculos aproximados e sem levar em conta a escala da régua. Por outro lado, se não se quer fazer uma construção apenas com régua e compasso, a perpendicular poderia perfeitamente ter sido traçada usando um esquadro.

“O retângulo áureo pode ser construído sem ter ainda o “significado áureo”. Vejamos como:”

Estranhamente, a autora nunca menciona que essa segunda construção é a versão exata (no sentido explicado acima) da construção aproximada explicada no início da seção. Essa construção com régua e compasso do retângulo de ouro aparece repetida no livro, bem mais adiante ([1, pgs. 52—54]), num capítulo intitulado “Sugestões para sala de aula”. Nenhuma menção é feita no livro ao fato de que a mesma construção já havia sido descrita numa seção anterior.

No restante da seção sobre o retângulo áureo ([1, pgs. 25,26]) a autora apresenta uma figura com retângulos áureos construídos um dentro do outro e, em seguida, começa a calcular a soma da progressão geométrica infinita:

$$S = x \cdot \left(1 + \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3} + \cdots + \frac{1}{\Phi^n} + \cdots\right)$$

Não está claro o *porquê* da autora resolver calcular essa soma. O resultado obtido $S = x \cdot \Phi^2$ é correto, mas veja os cálculos que a autora apresenta para justificá-lo:

$$\lim_{m \Rightarrow \infty} S = \frac{x(1 - (1/\Phi^m))}{1 - \frac{1}{\Phi}} =$$

$$S = \frac{x(1)}{(1 - 1/\Phi)} = \frac{x(\Phi)}{(\Phi - 1)}$$

Em primeiro lugar, não está claro que o leitor de [1] deveria saber o que significa *limite* de uma seqüência⁹ (note também o estranho uso da flecha dupla \Rightarrow em “ $m \Rightarrow \infty$ ”, a qual é normalmente usada apenas para denotar *implicações lógicas*; seria melhor escrever $m \rightarrow \infty$). Em segundo lugar, a autora confunde a *seqüência* com o *limite da seqüência*! Se S denota a soma da progressão geométrica infinita, então S é um *número* e não uma seqüência; não é correto dizer que o limite de S quando m tende a infinito (S nem depende de m) é igual a uma expressão que depende de m (essa expressão é igual à soma dos m primeiros termos da progressão geométrica). Essa última expressão é novamente igualada a S , na linha de baixo! Observe também a forma estranha com que a autora distribui os parênteses nas suas fórmulas.

Mais adiante no livro ([1, pg. 65]), no capítulo intitulado “Sugestões para Sala de Aula”, a autora volta a lidar com somas de progressões geométricas

⁹O *limite* de uma seqüência (x_1, x_2, x_3, \dots) de números reais é (caso exista) o número real L do qual os termos da seqüência se aproximam (fala-se também em *limite de x_n quando n tende ao infinito*). A definição rigorosa de limite de seqüência é um pouco mais complicada: diz-se que L é o *limite* da seqüência se para todo número real positivo ε (que pode ser pensado como uma “margem de erro” em torno de L) tem-se que $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$, para todo n *suficientemente grande* (isto é, para todo n maior que um certo n_0). Somas infinitas (ou *séries*) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ são definidas (quando existem) como sendo iguais ao limite da seqüência $s_n = x_1 + \dots + x_n$ cujos termos são somas finitas.

infinitas. Alguns dos erros que cometeu na seção “Retângulo Áureo” não ocorrem de novo quando o assunto reaparece; no entanto, novos erros aparecem. Na página 65, a autora está calculando a soma de uma progressão geométrica infinita com primeiro termo 10 e razão $\frac{5}{8}$. Encontramos a seguinte igualdade:

$$S = \frac{10[1 - (5/8)^{n+1}]}{(1 - 5/8)}$$

que corresponde à soma dos $n + 1$ primeiros termos da progressão geométrica em questão (seria melhor usar S_n em vez de S , já que o lado direito da igualdade depende de n ; mas isso é um detalhe menor). Encontramos em seguida as seguintes considerações:

“Quando n fica “muito grande” (tende para infinito) $(5/8)^{n+1}$ fica muito pequeno (tende para zero)

Resultando em

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S = \frac{10(1 - (5/8)^{n+1})}{(1 - 5/8)} = \frac{10 \cdot 1}{3/8} = \frac{80}{3} \text{ cm} \quad "$$

(os parênteses desbalanceados aparecem dessa forma no livro original)

Note como a autora novamente confunde o limite de S (deveria ser S_n) quando m (deveria ser n) tende a infinito com a soma dos $n + 1$ primeiros termos da progressão geométrica; essa soma finita é então igualada diretamente à soma da progressão geométrica infinita, sem mais comentários. Logo abaixo, no entanto, a autora deduz de forma essencialmente correta a fórmula para a soma de uma progressão geométrica infinita de primeiro termo a_1 e razão q :

“Para valores quaisquer de a e q a soma de uma Progressão Geométrica é:

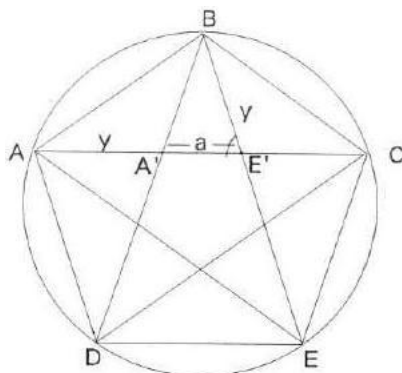
$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

quando a razão e $0 < q < 1$, passa-se ao limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_1 \frac{(1 - q^{n+1})}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \quad "$$

Nessa última parte o texto é ainda meio confuso e alguns pequenos erros se repetem, mas ao menos os erros mais grosseiros foram evitados.

1.1.4. Pentágono ou pentagrama. Na seção intitulada “Pentágono ou Pentagrama” ([1, pg. 30]) a autora investiga as relações entre o número áureo e um pentágono regular. Reproduzimos a figura:



que aparece na página 31 de [1]; os comentários abaixo referem-se sempre a essa figura. Denotaremos por O o centro da circunferência onde o pentágono está inscrito.

A autora começa a seção dizendo:

“*Observemos que:*

$$\frac{AC}{A'C} = \frac{A'C}{A'A} \quad ”.$$

Essa igualdade é correta, mas como o leitor poderia fazer para estabelecer sua validade? Mesmo leitores com uma certa experiência em geometria plana possivelmente não perceberiam de imediato como demonstrar tal igualdade. Além do mais, um leitor que conseguisse demonstrar essa igualdade sozinho com tanta facilidade provavelmente não precisaria nem estar lendo o livro [1]. Na verdade, tendo em mente que o triângulo BCA' é isósceles (donde o segmento $A'C$ é congruente ao lado do pentágono), a igualdade $\frac{AC}{A'C} = \frac{A'C}{A'A}$ é equivalente ao fato de que a diagonal do pentágono regular é igual a Φ vezes o seu lado. Esse último fato é “demonstrado” duas vezes no restante da seção, mas a autora nunca menciona que pode-se concluir daí a igualdade $\frac{AC}{A'C} = \frac{A'C}{A'A}$ que foi simplesmente jogada no início da seção.

A primeira “dedução” em [1] do fato (correto) de que a diagonal do pentágono regular é igual a Φ vezes o seu lado utiliza um argumento envolvendo o seno de 54 graus. Esse trecho de [1] já foi criticado por mim anteriormente, na Subseção 1.1.1. Além da crítica que expliquei na Subseção 1.1.1 (de que a igualdade crucial e não trivial $\Phi = 2 \cdot \text{sen } 54^\circ$ não foi demonstrada pela autora), observo também que não é *tão* imediato (para um iniciante em geometria) o fato (não explicado em [1]) de que o ângulo \widehat{OBC} mede 54 graus¹⁰.

A seguir a autora nos diz que:

¹⁰Uma possível justificativa para tal fato seria a seguinte: o ângulo \widehat{EOC} mede $\frac{1}{5} \cdot 360 = 72$ graus e portanto o ângulo \widehat{EBC} mede a metade disso (36 graus). Similarmente, o ângulo \widehat{DBE} também mede 36 graus. A medida do ângulo \widehat{OBC} é igual à soma da medida do ângulo \widehat{EBC} com a metade da medida do ângulo \widehat{DBE} . Temos $36 + \frac{1}{2} \cdot 36 = 54$.

“No pentagrama o triângulo BDE é semelhante ao triângulo AEB pois

$$AE'B \equiv BDE$$

$$A'BE' \equiv BDE”.$$

O triângulo BDE é realmente semelhante ao triângulo AEB (se não levamos em conta a ordem nos vértices), mas na verdade esses triângulos são evidentemente congruentes e essa observação não acrescenta nada de interessante. Provavelmente, há um erro tipográfico e a autora queria dizer que o triângulo BDE é semelhante ao triângulo $AE'B$. O que me parece muito estranho é que após a palavra “pois” não vem uma justificativa da afirmação feita antes dessa palavra, mas simplesmente um par de fórmulas, sendo que uma delas é uma mera repetição em símbolos da afirmação de que os triângulos BDE e $AE'B$ são semelhantes (na verdade, o símbolo \equiv muitas vezes é usado para denotar *congruência* de triângulos — se interpretamos \equiv como indicador de congruência, então ambas as fórmulas estão erradas). Não é completamente óbvio para um leitor iniciante que os triângulos BDE e $AE'B$ sejam de fato semelhantes e essa semelhança não é justificada no livro¹¹. A autora conclui então que:

$$\frac{a}{y} = \frac{y}{y+a}.$$

Não está totalmente explicitado em [1], mas essa igualdade segue de fato da semelhança entre os triângulos $A'BE'$ e $E'AB$:

$$\frac{A'E'}{E'B} = \frac{E'B}{BA} = \frac{E'B}{E'A},$$

sendo que a última igualdade segue do fato que o triângulo BAE' é isósceles. A autora agora usa algumas manipulações algébricas para concluir (corretamente) que $y = \Phi a$. Usando que $y = \Phi a$, a autora mostra (com algumas manipulações algébricas) que o quociente da diagonal do pentágono pelo seu lado (isto é, de $2y + a$ por $y + a$) é igual a Φ .

1.1.5. Decágono regular. Na seção intitulada “Decágono Regular” ([1, pgs. 32]), a autora considera um decágono regular de raio r e lado a . A autora afirma corretamente que:

$$\frac{a}{2r} = \text{sen } 18^\circ$$

mas escreve imediatamente abaixo dessa igualdade que:

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\Phi}$$

¹¹Uma possível justificativa é a seguinte: a medida do ângulo $B\hat{A}C$, que é a metade da medida do ângulo $B\hat{O}C$, é igual a 36 graus; similarmente, vê-se que a medida do ângulo $D\hat{B}E$ é também de 36 graus. Além do mais, as retas AC e DE são paralelas, pois a reta BO é perpendicular a ambas (a reta BO é a mediatriz do segmento AC e do segmento DE). Logo os ângulos $B\hat{E}'A'$ e $B\hat{E}D$ são correspondentes e portanto congruentes.

De fato, é verdade que $2 \cdot \sin 18^\circ = \frac{1}{\Phi}$, mas isso não é de modo algum trivial. Como o leitor (supostamente, alguém sem profundos conhecimentos de geometria e trigonometria, caso contrário nem precisaria ler o livro) poderia perceber que $2 \cdot \sin 18^\circ = \frac{1}{\Phi}$? A autora nem sequer diz algo do tipo “é possível mostrar que...” ou coisa que o valha. A passagem é simplesmente jogada assim, sem mais nem menos.

1.1.6. Espiral logarítmica. No capítulo intitulado “Espiral Logarítmica” ([1, pg. 35]), após nos mostrar o desenho de uma concha, a autora escreve:

“O gráfico polar de uma função exponencial é:

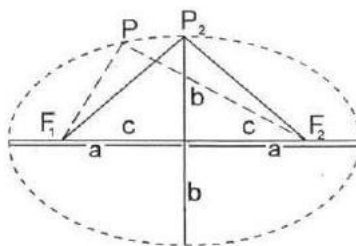
$$r_2/r_1 = q \quad ”$$

Não há nenhuma indicação do que as letras r_1 , r_2 e q possam significar. Estaria a autora falando sobre um *gráfico em coordenadas polares*? Nesse caso, eu esperaria encontrar as variáveis r e θ (ou ρ e θ) que normalmente aparecem em equações polares. Evidentemente a autora pode usar uma notação diferente da padrão, mas deveria explicá-la.

1.1.7. A elipse de ouro. Os erros mais grosseiros (e graves) do livro [1] aparecem no capítulo intitulado “A Elipse de Ouro” ([1, pgs. 40—42]). A autora começa considerando uma elipse com semi-eixo maior a , semi-eixo menor b , tais que:

$$2a = 1, \quad 2b = \frac{1}{\Phi}.$$

Os focos da elipse são denotados por F_1 , F_2 e a distância entre os focos por $2c$; denota-se também por P_2 um ponto onde a elipse intercepta seu eixo menor (de modo que a distância de P_2 até o centro da elipse é igual a b). A figura abaixo reproduz a que aparece em [1, pg. 40]:



A autora afirma que:

$$2a = F_1P_2 + F_2P_2 + F_1F_2.$$

Isso está errado! Na verdade, tem-se¹² que $2a = F_1P_2 + F_2P_2$. Poderia se pensar que trata-se de um mero erro tipográfico, mas não é o caso: a autora

¹²Segundo a definição de elipse, a soma $F_1P + F_2P$ não se altera quando P percorre a elipse. É fácil ver que essa soma é igual a $2a$ quando P é um ponto onde a elipse intercepta seu eixo maior. Logo a soma também deve ser igual a $2a$ quando $P = P_2$.

continua fazendo afirmações erradas (mas coerentes com a igualdade errada $2a = F_1P_2 + F_2P_2 + F_1F_2$), tais como:

$$a = F_1P_2 + c,$$

e:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} + c.$$

As afirmações corretas correspondentes seriam $a = F_1P_2$ e $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Prossequindo com seus cálculos, a autora descobre finalmente que:

$$2c = \frac{1}{\Phi}.$$

Fazendo os cálculos corretos, teríamos obtido na verdade que $2c = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}$. Para completar, a autora escreve que:

“A elipse de ouro é tal, que a distância entre os focos F_1F_2 é igual à metade do lado menor $2b$ que são áureos em relação a metade do lado maior $2a$.

$$2c = b = \frac{a}{\Phi} \quad ”$$

Essa afirmação está errada. Curiosamente, não somente ela está errada, mas ela também é inconsistente com a afirmação errada que a autora obteve logo antes. Numa linha a autora escreve que $2c = \frac{1}{\Phi}$ (ou seja, $2c = 2b$) e logo abaixo ela escreve que $2c = b$.

1.1.8. O número de ouro em diversas áreas. No capítulo intitulado “O Número de Ouro em Diversas Áreas” ([1, pgs. 47,48]) encontramos algumas outras pérolas. A autora escreve, sobre o número de ouro:

“Quando procuramos com carinho podemos encontrá-lo em toda parte. Veja só:

1) Qualquer peça que se quebre na metade poderá ser recomposta, mas se atingir a marca de $1/\Phi$ não terá conserto (você acredita?).”

Acho que não vale a pena argumentar sobre essa frase.

“2) O ciclo menstrual da mulher é de 28 dias, portanto $1/\Phi$ de 28 será 17,5 dias, onde é a fase final de amadurecimento, sendo garantida a fertilização.”

Isso é absolutamente falso. O período mais fértil ocorre próximo ao meio do ciclo (décimo quarto dia, idealmente). Nada ocorre em “17,5 dias” e não existe nada chamado “fase final de amadurecimento” e nem garantia alguma de fertilização em qualquer fase.

A autora termina colocando mais duas afirmações sobre o número de ouro que parecem também estranhas (nenhuma referência foi dada no livro), embora eu não tenha absoluta certeza de que são completamente desprovidas de fundamento:

“3) Uma planta frutífera estará com as mais saborosas frutas exatamente quando atingir $1/\Phi$ de carga total.

4) Entre os bovinos a desmama ocorre aos 8 meses. Sua alimentação é à base de leite, mas quando atinge $1/\Phi$ deste período começa a procurar outros alimentos.”

CAPÍTULO 2

Nílson José Machado

Nílson José Machado é atualmente Professor Titular da FE-USP (Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo). Orientou (segundo seu Currículo Lattes) 15 mestrados e 16 doutorados (quase todos na própria FE-USP); publicou diversos artigos e livros na área de educação.

2.1. A obscuridade matemática

É um fato muito conhecido que diversas áreas do conhecimento humano utilizam a Matemática como ferramenta, seja através daquilo que se conhece como *modelagem matemática* (usada, por exemplo, na Física e na Engenharia), seja através dos métodos estatísticos (usados nas ciências biológicas e mesmo nas ciências humanas). Um exemplo de modelagem matemática (um tanto banal, mas bem familiar a todos aqueles que aprenderam cinemática na escola) ocorre quando se usa a fórmula $S = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + S_0$ para descrever o movimento de um corpo em queda livre próximo à superfície da Terra, desprezando-se a resistência do ar (aqui t denota o tempo, S a altura do corpo no instante t , g a aceleração da gravidade e v_0 , S_0 respectivamente a componente vertical da velocidade e a altura do corpo no instante $t = 0$). Os métodos estatísticos podem ser usados, por exemplo, por um médico que realiza um estudo clínico e deseja comparar a eficácia de dois tratamentos, usando uma amostra de pacientes; aqui, pode-se usar a Matemática para melhor quantificar a “significância” (num sentido técnico) das conclusões obtidas, levando em conta o tamanho da amostra. Um fenômeno bastante curioso (exposto em [9]) que ocorre em alguns círculos do meio acadêmico é o “uso” da Matemática em textos (não matemáticos¹) sem que exista qualquer justificativa aparente para a necessidade desse “uso”, deixando uma impressão de que o único papel da Matemática em tais textos seria o seu obscurecimento (deliberado ou não); é bem natural que leitores leigos em Matemática dos referidos textos sintam-se intimidados pelo linguajar técnico

¹Por “texto matemático” estou entendendo aquele que tem como um dos seus objetivos principais a apresentação de conceitos matemáticos. Esse é o caso, por exemplo, dos artigos publicados em revistas especializadas de Matemática ou em livros técnicos de Matemática. Incluímos aí os textos *metamatemáticos*, que falam *sobre* a Matemática (um texto que esteja criticando um conceito matemático, falando sobre a história de um conceito matemático ou mesmo discutindo sobre a melhor forma de se ensinar determinado conceito matemático). Em todos esses casos é evidente que a Matemática é o foco e não uma coadjuvante.

e sejam às vezes falsamente levados a uma idéia de profundidade, embasamento científico e erudição do autor. O “uso” da Matemática nesse último sentido será chamado no restante deste livro de *obscuridade matemática* (após o livro [9] de Sokal e Bricmont, tal prática ficou em certos meios identificada com o nome “impostura intelectual”).

Entendo que os usos da Matemática em textos não matemáticos podem ser aproximadamente classificados nas seguintes categorias:

- (a) uso da Matemática como ferramenta (modelagem matemática ou métodos estatísticos);
- (b) uso da Matemática como metáfora, auxiliando a explicação de algum assunto não matemático;
- (c) obscuridade matemática (no sentido explicado acima).

Algumas palavras sobre a categoria (b): metáforas são um recurso pedagógico comum e são normalmente empregadas para se explicar algo novo (com o qual o ouvinte tem pouca ou nenhuma familiaridade) usando-se comparações com algo com o qual o ouvinte já tem razoável familiaridade. Seria bastante estranho usar metáforas para explicar algo familiar (e às vezes banal), fazendo-se comparações com conceitos complexos e abstratos com os quais o ouvinte tem pouca ou nenhuma familiaridade. Poderia talvez se conceber uma situação em que se usa a Matemática como metáfora para explicar conceitos não pertinentes à Matemática para um matemático profissional (embora isso faça sentido, devo confessar que tenho dificuldades em vislumbrar situações nas quais tal prática seria pedagogicamente relevante).

É um tanto constrangedor que a obscuridade matemática tenha sido empregada por intelectuais tais como Jacques Lacan (veja [9, Capítulo 1] para uma discussão a respeito, juntamente com citações literalmente delirantes da obscuridade matemática de Lacan). Não é necessariamente verdade que toda a obra de um autor esteja condenada apenas pelo fato de o mesmo praticar a obscuridade matemática; no entanto, acredito que a identificação de tal prática deveria no mínimo levar a um questionamento sobre a seriedade intelectual de um autor. Observo que a obscuridade matemática pode se manifestar de diversas formas: frases completamente desprovidas de significado, afirmações matemáticas incorretas, menções de objetos matemáticos de forma confusa ou simplesmente o emprego de noções matemáticas em situações onde não há a mais remota justificativa de como tais conceitos sofisticados poderiam contribuir para o texto².

É bastante compreensível que autores não matemáticos cometam erros ou imprecisões quando fazem uso legítimo da Matemática em sua pesquisa (categoria (a) acima) e não estou de modo algum fazendo críticas severas a

²Nas palavras de Sokal e Bricmont ([9, pg. 10]): “Não seria bom (para nós, matemáticos e físicos) que o teorema de Gödel ou a teoria da relatividade *tivessem* implicações imediatas e profundas no estudo da sociedade? Ou que o axioma da escolha pudesse ser usado no estudo da poesia? Ou que a topologia tivesse algo a ver com a psique humana? Contudo, este não é o caso.”

situações como essa (assim como, não seria de se estranhar muito se um matemático aplicado cometesse alguns erros sobre, digamos, Biologia, caso se aventurasse a fazer um trabalho de modelagem sobre determinado fenômeno biológico). Critico severamente, no entanto, autores que cometem erros durante a sua prática da obscuridade matemática (é um tanto ridículo que um autor que aparenta estar usando um linguajar matemático sofisticado apenas para impressionar um ouvinte leigo esteja na verdade cometendo um bocado de erros técnicos); na verdade, julgo que a obscuridade matemática é uma prática a ser denunciada, mesmo quando livre de erros técnicos.

Como um leitor leigo em Matemática pode fazer para diferenciar o uso legítimo da Matemática num texto da mera obscuridade matemática? Não há uma estratégia definitiva, mas existem algumas dicas simples que se deve ter em mente. Em textos onde se faz modelagem matemática, normalmente há explicações razoavelmente explícitas de como o modelo funciona, de quais objetos do mundo físico, biológico ou social (ou grandezas observáveis) correspondem a quais objetos matemáticos abstratos. Quanto aos métodos estatísticos, seu uso é em geral bastante evidente: são fornecidas tabelas de dados coletados em algum experimento, observação ou sondagem e depois métodos estatísticos (como, por exemplo, testes de hipótese, intervalos de confiança) são usados para analisar os dados e chegar a certas conclusões. Em casos de obscuridade matemática, conceitos sofisticados e abstratos aparecem em geral sem nenhuma explicação da sua relação com os objetos concretos que se quer estudar; também, provavelmente o autor não faz nenhum esforço para explicar (ao menos superficialmente) o significado de tais conceitos em termos um pouco mais acessíveis ao público leigo em Matemática (mesmo quando o texto visa atingir um público leigo em Matemática).

Uma questão natural que sempre aparece quando se encontra autores usando obscuridade matemática é a da motivação. Seria uma tentativa deliberada de enganar ou iludir os seus leitores, uma tentativa de passar um falso respaldo científico a opiniões do autor, de mostrar uma pretensa erudição? Ou seria auto-engano e falta de conhecimento sobre o assunto? Ou uma mistura de todas essas coisas? Infelizmente, é impossível determinar com absoluta certeza as intenções de um autor e tudo que se pode fazer aqui é especular.

Nesta seção, mostraremos através de uma quantidade grande de citações que Nilson José Machado é um adepto da obscuridade matemática. Sobre as verdadeiras intenções de Machado, não sabemos com certeza quais sejam. No entanto, pode-se afirmar que Machado não é completamente leigo em Matemática, já que foi aluno de disciplinas de pós-graduação em Matemática no IME-USP (Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo).

As citações que aparecem aqui foram todas retiradas do livro [8], publicado por Machado em 1995 (e reeditado muitas vezes), intitulado³ “Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente”. Observo que, de 1995 para cá, Machado não abandonou completamente a prática da obscuridade matemática; com efeito, em palestra proferida por Machado no primeiro semestre de 2006 no IME-USP, ouvi o mesmo afirmar que “autoridade é um espaço vetorial de dimensão quatro”, quando apontava para uma figura em que a palavra “autoridade” aparecia no centro, ligada às palavras “chefe”, “padre”, “pai” e “juiz” (supostamente a “base” desse espaço vetorial⁴). Evidentemente, “autoridade” não é um espaço vetorial e acredito que Machado entende perfeitamente isso. Não é aparente como uma suposta analogia entre autoridade e espaços vetoriais poderia beneficiar os ouvintes da palestra, sejam eles leigos ou matemáticos; a idéia de espaço vetorial nesse contexto nunca voltou a ser explorada no restante da palestra, nem foi fornecida qualquer explicação de como essa analogia poderia funcionar a não ser pela vaga insinuação de que “chefe”, “padre”, “pai” e “juiz” seriam uma base desse espaço vetorial.

2.1.1. A topologia. Em duas passagens de [8], Machado cita a noção matemática de topologia. No texto intitulado “Inteligência múltipla: a língua e a matemática no espectro de competências”, Machado comenta ([8, pg. 110]):

*“De fato, pensar o conhecimento como uma rede de significações, em contraposição ao bem arraigado paradigma cartesiano das cadeias causais, exige que se atente para certas características fundamentais de tal teia, onde os nós/significados são construídos a partir de relações/propriedades de múltipla natureza, resultando naturalmente heterogêneos, onde a trama de interconexões apresenta-se em permanente metamorfose, não se desenvolvendo como irradiações a partir de um único centro mas apresentando a cada instante múltiplos centros de interesse, e onde, sobretudo, **a noção***

³Observo que esse livro é apontado por Machado em seu Currículo Lattes como sendo uma das principais obras da sua carreira.

⁴Informalmente, um *espaço vetorial* é uma estrutura matemática munida de certas operações, satisfazendo certas propriedades; o conjunto dos vetores do espaço Euclidiano tridimensional (que aparecem nos cursos de Física do colégio) constituem um exemplo de espaço vetorial (observe que é possível somar vetores e multiplicar vetores por números reais — tais operações fazem desse conjunto de vetores um espaço vetorial). Outros exemplos de espaços vetoriais são o conjunto dos polinômios (com coeficientes reais), das matrizes (com número de linhas e colunas fixados e entradas reais) ou das funções a valores reais com certo domínio fixado. Uma *base* de um espaço vetorial é, essencialmente, uma coleção de vetores (elementos do espaço vetorial) que permite “descrever” todos os outros vetores de modo único, constituindo então um *sistema de coordenadas* no espaço. Por exemplo, os versores \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} paralelos aos eixos coordenados constituem uma base do espaço dos vetores do espaço Euclidiano tridimensional e os *monômios* $1, x, x^2, x^3, \dots$, constituem uma base do espaço vetorial dos polinômios.

de distância ou de proximidade entre os temas deve ser considerada em sentido topológico, transcendendo os limites da métrica usual.” (grifos nossos)

No referido texto, Machado discorre sobre a teoria das inteligências múltiplas de Howard Gardner (veja [6]), na qual ressalta-se que noções clássicas de inteligência devem ser estendidas de modo a incluir uma grande variedade de competências humanas (fala-se em inteligência lógico-matemática, inteligência linguística, inteligência interpessoal, inteligência intrapessoal, inteligência musical, inteligência corporal-cinestésica e inteligência espacial; Machado propõe que se acrescente também a noção de inteligência pictórica).

No texto intitulado “Conhecimento como rede: a metáfora como paradigma e como processo”, Machado escreve ([8, pg. 149]):

“O que está em foco no Princípio de topologia é a idéia de proximidade entre significações, que não poderia ser considerada do ponto de vista da geometria clássica, mas sim no âmbito da topologia. A noção de distância precisa ser compreendida em sentido topológico: há distâncias e distâncias, no espaço e no tempo, entre objetos ou entre procedimentos, entre pontos ou entre curvas, entre ações e sensações, e o metro linear não passa de uma pequena possibilidade de tratar-se delas. Topologicamente, por exemplo, a distância entre uma xícara com asa e outra sem asa é muito maior do que a existente entre uma esfera e um cubo.

Ao esboçar-se a rede hipertextual, de modo algum a proximidade entre nós/significados, entre feixes de relações, pode deixar-se subsumir pela contigüidade física entre objetos ou representações; a proximidade pode ter sempre múltiplos sentidos.”

Nesse texto (como em vários outros), Machado passa boa parte do tempo insistindo na idéia de que a noção de “rede” (num sentido vago, que varia muito de uma página para a outra) é uma boa metáfora para a representação do conhecimento (por sinal, parece-me um pouco sem sentido insistir tanto, usando uma linguagem tão rebuscada e uma gama enorme de citações de vários tipos, no fato pertencente ao senso comum de que interligações entre vários conceitos são feitas quando um indivíduo aprende determinado assunto ou “constrói o seu conhecimento”). No trecho que citei, Machado estava a explicar o “princípio de topologia”, ligado a um “paradigma do hipertexto” sugerido por Pierre Lévy (veja [7]).

Ora, não faz muito sentido acreditar que idéias da topologia possam realmente enriquecer o texto de Machado de alguma forma. O contexto em que as citações aparecem correspondem a discussões bem vagas e informais da idéia de que redes e hipertextos são metáforas “fecundas” para representação do conhecimento⁵. O uso de topologia nesse contexto seria então um

⁵Deve-se ressaltar aqui que Machado nunca explica *realmente* de forma razoavelmente precisa como as redes e os hipertextos seriam usados para modelar o conhecimento (muito

discurso metafórico dentro de uma discussão que já era, por si só, metafórica. Na verdade, tudo isso parece apenas uma forma bastante pedante e confusa de dizer banalidades. Abaixo, apontamos alguns escorregões mais técnicos que Machado comete no seu “uso” da topologia (para melhor apreciar essa discussão, recomendamos ao leitor não especialista que estude, superficialmente ao menos, o conteúdo da Seção A.3 do Apêndice A). Ressalto aqui que a minha principal crítica ao texto de Machado não são os escorregões técnicos listados abaixo, mas simplesmente o uso das idéias da topologia num contexto em que são completamente irrelevantes.

- É bastante estranho falar em “distância em sentido topológico”. A noção de espaço topológico é justamente a generalização da noção de espaço métrico (conjunto munido de uma noção de distância), onde se *abandona a noção de distância!* (a “noção de distância” que existia no espaço métrico é substituída pela *topologia*, que é um estrutura mais fraca do que a estrutura métrica). “Distância” é justamente o principal exemplo de uma noção que não é topológica (diferentemente de, por exemplo, “continuidade”, que *é* uma noção topológica⁶!).
- O que “espaço e tempo”, “objetos e procedimentos”, “ações e sensações” têm a ver com topologia?
- Para sairmos da “métrica usual” (seria do espaço Euclideano?) ou “do ponto de vista da geometria clássica” não é necessário de forma alguma entrarmos “no âmbito da topologia”. Parece haver aqui uma confusão entre *geometrias não-Euclidianas* e topologia geral⁷.

pelo contrário, Machado faz questão de enfatizar que não é esse seu objetivo — veja, por exemplo, citação de [8, pg. 135] que transcrevemos na página 28). Caso se estivesse a usar alguma noção rigorosa de rede numa tentativa de modelagem matemática para algum tipo de teoria do conhecimento, não seria totalmente absurdo que a topologia realmente pudesse ser usada como ferramenta (embora fosse mais provável o emprego de técnicas da combinatória e da matemática discreta, como a *teoria dos grafos*).

⁶Quando Machado diz que “a distância entre uma xícara com asa e outra sem asa é muito maior do que a existente entre uma esfera e um cubo”, está se referindo ao fato de que uma esfera é topologicamente equivalente (homeomorfa) a um cubo, enquanto que uma xícara com asa não é homeomorfa a uma xícara sem asa. Não é muito adequado falar em “distância” aqui, já que ou dois espaços topológicos são homeomorfos ou não são; não há em geral uma “noção de distância” que quantifica o quão próximos de serem homeomorfos os espaços estão.

⁷A métrica da geometria clássica (Euclideana) está associada a uma topologia (como qualquer métrica está). O termo *geometria não-Euclideana* é normalmente usado para referir-se a geometrias alternativas onde substitui-se o axioma de Euclides das retas paralelas, que diz que por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada. A *geometria hiperbólica de Lobachevsky* (exemplo padrão de geometria não Euclideana, na qual por um ponto fora de uma reta passam uma infinidade de retas paralelas à reta dada) corresponde a uma topologia perfeitamente metrizável. Também as geometrias estudadas no campo da geometria diferencial (as variedades Riemannianas) correspondem a topologias metrizáveis. Não há necessidade de se falar em topologia geral se tudo o que se pretende é migrar da geometria Euclideana para alguma geometria não-Euclideana.

2.1.2. Categorias e alegorias. Vou agora analisar a aparente empolgação de Machado com a *teoria das categorias* e, mais especificamente, com as *alegorias*, que são categorias especiais munidas de certa estrutura adicional. A teoria das categorias é a área da Matemática que é usada para, entre outras coisas, organizar as várias estruturas abstratas que aparecem na Matemática (para não especialistas, uma melhor compreensão das discussões que aparecem aqui será obtida após um estudo das Seções A.1 e A.2 do Apêndice A).

Antes de mais nada, devo fazer alguns esclarecimentos sobre os nomes dados aos objetos matemáticos. A Matemática (ou, mais precisamente, seus praticantes) empresta freqüentemente palavras da linguagem coloquial para dar nome a conceitos sofisticados e abstratos. Em alguns casos, os significados coloquiais dos nomes dos objetos matemáticos têm de fato alguma relação com o significado técnico dos mesmos (é o caso, por exemplo, da noção de espaço topológico conexo⁸), em alguns casos essa relação é bem vaga e em outros (muito freqüentes), não existe *nenhuma* relação entre significado técnico e coloquial (corpos, grupos, anéis, filtros, espaços separáveis, etc). A verdade é que matemáticos normalmente importam-se pouco com o *nome* que dão para seus objetos (que podem até, em alguns casos, ser escolhidos por uma mera brincadeira) mas importam-se muito com o *significado* e com a apresentação de *definições precisas* para esses objetos. Em vista dessas informações, o leitor deve ser capaz de perceber que é um tanto patético empolgar-se com determinada noção matemática, apenas por causa de seu nome (isso poderia ser comparado a, por exemplo, um consumidor que escolhe o computador que vai comprar pela *cor*, ignorando as especificações técnicas do produto).

Veremos no que segue que (aparentemente, ao menos) Machado está um tanto empolgado com o nome “alegoria” que foi dado por Freyd e Scedrov (veja [5]) a um objeto matemático sofisticado e abstrato (veja definição completa na página 42). Não que Machado desconheça completamente a definição matemática de alegoria (que é descrita por ele em alguns trechos de seus textos, de forma confusa, com vários erros), mas algumas afirmações feitas por Machado a respeito de tal conceito são tão absurdas que deve-se questionar o quanto Machado realmente entendeu da definição de alegoria ou o quanto ele estaria tentando simplesmente iludir seus leitores leigos com frases de efeito.

⁸A definição matemática de espaço topológico conexo é bastante técnica (um espaço topológico é dito *conexo* quando não pode ser escrito como união de dois conjuntos abertos disjuntos e não vazios; veja Seção A.3 do Apêndice A para mais detalhes sobre espaços topológicos e conjuntos abertos). No entanto, uma análise das idéias por trás dessa definição levam à percepção de que espaços conexos tratam-se essencialmente de “espaços que tem um único pedaço” (o que corresponde ao significado coloquial da palavra “conexo”). Deve-se ter um certo cuidado, no entanto, com essa interpretação intuitiva da definição técnica já que, por exemplo, existem espaço topológicos conexos que não são *conexos por caminhos* (isto é, apesar do espaço ser conexo, não é o caso que se pode “deslocar continuamente” de um ponto arbitrário a outro ponto arbitrário do espaço).

Em boa parte do seu livro [8], Machado insiste na importância das metáforas como recurso pedagógico (aliás, esse é um ponto em que estou plenamente de acordo com Machado). Alegorias são, para Machado, uma espécie de metáfora longa e exagerada ou, mais precisamente, nas palavras do próprio ([8, pg. 159]):

“De modo sintético, a alegoria é uma metáfora continuada, ou um encadeamento de metáforas, numa composição que visa a que se conte uma história através do recurso ao sentido figurado. Além da alegoria em sentido estrito, tal recurso pode assumir diferentes formas, como a parábola, o mito, a fábula, entre outras. Como ocorreu no nível da metáfora, também em sentido ascendente, não se procurará discernir cuidadosamente os matices de tais formas, resumindo as distinções à consideração de dois níveis de recursos: a metáfora, em que a construção do sentido figurado tem a “dimensão” de uma frase; e a alegoria, em que um encadeamento de imagens metafóricas serve de base para que se construa um cenário ou se conte uma história.”

Poderia se acreditar que é mera coincidência que Machado fale muito sobre as alegorias em sentido similar ao coloquial (descrito na citação acima) e também sobre as alegorias no sentido matemático (observe que não há realmente nenhuma relação entre as duas noções de alegoria e eu especularia que a motivação de Freyd e Scedrov para usar o nome “alegoria” é simplesmente uma brincadeira baseada na rima⁹ entre as palavras “categoria” e “alegoria”). Já quando fala dos objetivos gerais de seu livro ([8, pg. 17]), Machado propõe (no meio de uma lista de objetivos razoáveis, tais como “analisar as articulações entre o discurso pedagógico e as ações docentes”, “investigar o papel desempenhado pelas tecnologias informáticas nos processos cognitivos”, etc), os seguintes objetivos um tanto esdrúxulos:

- *“Investigar o recurso a objetos matemáticos para a representação do conhecimento, ressaltando a dupla face da presença da alegoria em matemática: como construção metafórica, na instauração dos novos significados, e como um novo objeto matemático, revestido de todo o rigor formal, uma **generalização da idéia de categoria;**”* (grifos nossos)
- *“Estabelecer relações entre os significados dos objetos matemáticos no interior da matemática e externamente a ela, como no caso das categorias algébricas e das categorias gramaticais;”*

Objetivos como esses são *no mínimo* muito especulativos. Diga-se de passagem, nem é realmente verdade que a noção de alegoria é uma generalização da noção de categoria, muito pelo contrário (toda alegoria é uma categoria).

⁹Observe que no original em inglês, o título do livro de Freyd e Scedrov é *Categories, Allegories*.

No texto intitulado “Inteligência múltipla: a língua e a matemática no espectro de competências”, encontra-se o seguinte trecho, completamente absurdo ([8, pg. 93]):

“De fato, justamente no terreno da álgebra homológica, um dos temas matemáticos mais sofisticados e promissores a partir da década de 60, surgiu e encontra-se em desenvolvimento o conceito de alegoria, uma generalização da noção de categoria, que pode vir a constituir um marco definitivo do lugar do pensamento analógico na matemática mais “abstrata”. Em Freyd e Scedrov (1990), podem ser encontrados argumentos decisivos nesse sentido; dificilmente, após a leitura de Categories, allegories, Jung poderia reafirmar suas convicções a respeito da irrelevância da matemática para o desenvolvimento do pensamento lógico, que inclui o analógico, naturalmente.”

No contexto do qual a citação foi tirada, Machado dizia que Jung não gostava de Matemática na escola e que Jung não via a relação entre Matemática e a capacidade de pensamento lógico. Supostamente, Jung mudaria de idéia se conhecesse o livro *Categories, allegories*; esse pequeno trecho de texto, é particularmente denso em bobagens.

- Não é muito apropriado dizer que as alegorias são um conceito em desenvolvimento no terreno da álgebra homológica; o livro de Freyd e Scedrov não é um livro de álgebra homológica e nunca vi um livro de álgebra homológica que sequer mencionasse o conceito de alegoria (categorias, no entanto, aparecem em essencialmente todos os livros de álgebra homológica, mas também não seria adequado considerá-las um conceito específico de tal área, já que a noção de categoria pode ser relacionada com quase qualquer assunto de Matemática). É também muito questionável que álgebra homológica seja “um dos temas matemáticos mais sofisticados e promissores a partir da década de 60” (apesar de que seja mesmo um tema sofisticado e interessante, a frase de Machado é um tanto exagerada).
- Novamente, Machado erra ao dizer que a noção de alegoria é uma generalização da noção de categoria.
- Quando Machado diz que a noção de alegoria “pode vir a constituir um marco definitivo do lugar do pensamento analógico na matemática mais abstrata”, faz duas afirmações estranhas: em primeiro lugar, o pensamento analógico (no sentido de “pensar usando analogias”) é bem rotineiro no trabalho dos matemáticos¹⁰ e não

¹⁰Deve-se observar que analogias e metáforas são recursos muito úteis na pedagogia da Matemática. Não só isso, o estabelecimento de analogias entre teorias e entre conceitos é uma ferramenta quase imprescindível na formulação de conjecturas, na investigação das possibilidades de se generalizar uma teoria ou conceito e até no processo de descoberta de novas demonstrações. O que *não é admitido* em Matemática é o uso de analogias para *demonstrar* resultados originais (evidentemente, nem deveria ser o contrário: analogias podem levar a conclusões erradas).

uma novidade que apareceu “no terreno da álgebra homológica, a partir da década de 60”, como Machado insinua. Em segundo lugar, não há nada de revolucionário na noção matemática de alegoria; muito pelo contrário, é uma definição como outra qualquer, similar a muitas outras que aparecem em álgebra (o velho esquema “conjunto, munido de operações, satisfazendo uma lista de propriedades”, que está em todo canto da matemática moderna, desde os livros de Bourbaki).

- *Last but not least*, a afirmação de que Jung melhoraria sua impressão sobre a Matemática caso tivesse lido “*Categories, allegories*” é um completo disparate¹¹. Um indivíduo que não tenha bastante preparo em tópicos de Matemática tais como álgebra abstrata e topologia geral não tem qualquer possibilidade de apreciar (ou mesmo compreender) um livro sobre teoria das categorias. Na verdade, o livro de Freyd e Scedrov é (apesar de conter assuntos muito interessantes) particularmente difícil de ler mesmo para matemáticos experientes¹².

No texto intitulado “Conhecimento como rede: a metáfora como paradigma e como processo” Machado ([8, pg. 135]) comenta sobre os supostos “desvios deformadores” que uma tentativa de formalização de sua imagem da rede poderiam trazer; Machado afirma então que Bunge (o físico e filósofo Mario Bunge, vide Subseção 2.2.1) prega a “imprescindibilidade da axiomatização” e a “ausência de alternativas para a concepção de teorias enquanto aparatos formais” (vide página 28, onde transcrevemos na íntegra a afirmação de Machado). Machado cita então um trecho do livro *Filosofia da Física*, de Bunge ([2, pg. 217]):

“Enquanto se mantiver o princípio absurdo de que uma teoria científica não é um sistema hipotético-dedutivo, mas uma síntese indutiva, uma metáfora ou seja o que for, e enquanto houver uma relutância irracionalista em relação à axiomática, não podem esperar-se avanços decisivos no estudo das relações interteóricas. E enquanto não estiverem disponíveis cuidadosas histórias de casos ou uma teoria geral, deveríamos abster-nos de espremer as relações interteóricas para sumo filosófico.”

¹¹Como eu sei disso sem ter conhecido Jung? Mais ou menos do mesmo jeito que eu sei que Jung não era capaz de correr a 100km/h, ou de dar saltos de 5 metros de altura. Nenhum ser humano consegue fazer essas coisas.

¹²Francamente, o livro está longe de ser um modelo de texto didático. Além de conter poucos exemplos que ilustrem os conceitos abstratos em situações matematicamente mais “concretas”, em alguns trechos fica-se até com a impressão de que os autores escolhem a notação de propósito de modo a tornar o livro mais difícil de ler. Para o leitor curioso, sugiro que dê uma olhada em páginas de [5] tais como 37, 40, 158, 210, 236, 246, 247, 248, para exemplos de como a notação dos autores é difícil de decifrar.

Ora, não seria muito difícil construir bons argumentos contra uma afirmação radical¹³ como a de que o método axiomático seja imprescindível na elaboração de teorias (entendendo a palavra “teoria” em sentido bem amplo, supostamente). Em vez disso, Machado nos apresenta a seguinte pérola ([8, pg. 136]):

“A história da ciência, no entanto, freqüentemente tem desapontado emissores de mensagens tão insofismáveis, tão definitivas. As surpresas, neste caso, podem provir do próprio terreno matemático, no seio de seu formalismo. Em 1990, Freyd e Scedrov constroem o conceito de alegoria, uma generalização da noção matemática de categoria, onde as relações entre os objetos constituintes não necessitam de características funcionais. Em outras palavras, numa alegoria existem objetos e relações (morfismos) que os enlaçam e determinam, como numa categoria; entretanto, as relações não têm necessariamente características funcionais, como numa categoria, não precisam ter origem e extremidade fixadas, abrindo-se, assim, a possibilidade da consideração de relações não-causais, como as analógicas, por exemplo. No âmbito de tal teoria das alegorias, impregnada de símbolos matemáticos e totalmente formalizada, os autores citados propõem, caprichosamente, que as teorias não passam de alegorias... em sentido matemático. O futuro dirá se faz sentido pensar-se que talvez não o sejam apenas neste sentido.”

Analisemos em detalhes as fantasias e os erros que se encontram no trecho citado acima.

- Como já explicamos anteriormente, a noção matemática de alegoria é dada por uma definição matemática como outra qualquer, similar a muitas outras que aparecem em álgebra. É uma completa fantasia a idéia de que essa definição pudesse de alguma forma indicar algum tipo de insucesso do método axiomático ou qualquer coisa nessa direção. O livro [5] de Freyd e Scedrov é escrito na melhor ortodoxia do método axiomático e do rigor matemático.
- Mais uma vez, Machado recorre no erro de afirmar que o conceito de alegoria é uma generalização do conceito de categoria.
- É correto afirmar que numa alegoria “as relações entre os objetos constituintes não necessitam de características funcionais” (entendendo que por “relações”, Machado esteja se referindo aos morfismos¹⁴). No entanto, isso não é uma particularidade das alegorias; já numa categoria não é o caso que os morfismos precisam ser necessariamente funções (e, afinal de contas, toda alegoria é também

¹³Na verdade, Machado não está nem de longe sendo justo nas suas afirmações sobre Bunge. Voltaremos a esse assunto na Subseção 2.2.1.

¹⁴Ele próprio escreve “morfismos” entre parênteses logo abaixo, no trecho citado. É realmente verdade que nos exemplos típicos de alegoria (veja Subseção A.2.1, no Apêndice A) os morfismos são relações (e não funções). Ao menos Machado entendeu alguma coisa do livro [5] de Freyd e Scedrov.

uma categoria). *O mais curioso é que isso é um fato bem elementar, que tipicamente é bem explicado logo nos primeiros exemplos que aparecem em qualquer livro de teoria das categorias!*

- Machado afirma que numa alegoria as “relações” (morfismos) “não precisam ter origem e extremidade fixadas”. Isso é simplesmente falso. Alegorias são categorias e em qualquer categoria os morfismos precisam ter domínio e contra-domínio (origem e extremidade) bem definidos¹⁵.
- A menção às “relações não-causais” e às relações “analógicas” é puro *nonsense*, isso não tem nada a ver com teoria das categorias nem com teoria de alegorias.
- Os autores (Freyd e Scedrov) não propõem que “as teorias não passam de alegorias”. Provavelmente Machado está se referindo à Seção B.3 do Apêndice B de [5], onde Freyd e Scedrov mostram como se pode construir uma alegoria a partir de uma dada teoria (*teoria* entendida no sentido de *sistema dedutivo formal*, com regras de sintaxe e de inferência explicadas de forma muito rigorosa no Apêndice B de [5]). Essa construção abstrata e rigorosa é feita com o objetivo específico de mostrar aplicações à lógica matemática de alguns dos teoremas gerais sobre alegorias explicados no restante do livro¹⁶. A visão caricata de Machado que pretende insinuar que “teorias não passam de alegorias” é completamente descabida.

Mas a história não acabou. O livro [8] de Machado contém *dois capítulos inteiros* somente sobre categorias, sendo um deles sobre alegorias. Os capítulos são intitulados “Dos Conjuntos às Alegorias: os objetos matemáticos e a representação do conhecimento” e “Linguística e Matemática: das categorias gramaticais às categorias algébricas”. Passemos agora à análise de alguns trechos dos mesmos.

...

[Seção ainda incompleta]

¹⁵Mas, digamos que eu decida inventar uma nova definição matemática, uma *verdadeira* generalização do conceito de categoria, em que os morfismos não precisem mais ter domínio e contra-domínio bem definidos. Não haveria nada de errado em se enunciar uma tal definição, se não o fizeram até agora é porque não houve interesse. De que forma o simples enunciado de uma nova definição matemática poderia consistir numa crítica as idéias de Bunge sobre teorias axiomáticas?

¹⁶Mais especificamente, Freyd e Scedrov conseguem demonstrar (usando teoremas gerais sobre alegorias aplicados a alegorias determinadas por teorias formais) o *Teorema da Completude de Gödel* e o fato que o axioma da escolha e a hipótese do *continuum* não são teoremas de ZF (teoria dos conjuntos de Zermelo–Fraenkel). Os dois últimos são resultados muito profundos cuja demonstração padrão depende da sofisticada técnica conhecida como *Forcing*.

2.2. Sobre as citações a outros autores

2.2.1. Mario Bunge. O físico e filósofo Mario Bunge nasceu em 1919 na cidade de Buenos Aires (Argentina). Doutourou-se em ciências físico-matemáticas em 1952 pela Universidad Nacional de La Plata e, desde 1966, é professor da McGill University em Montreal (Canadá). Bunge é autor de dezenas de livros e centenas de artigos em assuntos tão diversos como Física Teórica, Matemática Aplicada, Fundamentos da Física, Fundamentos da Sociologia e da Psicologia, Filosofia da Ciência, Semântica, Epistemologia, Ética, Ciência Política, etc.

No texto intitulado “Conhecimento como rede: a metáfora como paradigma e como processo” Machado escreve ([8, pg. 135]):

“Tanto no que se refere à organização interna de uma teoria quanto no estabelecimento de relações interteóricas, a relativa flexibilidade sugerida por Mosterín dá lugar, algumas vezes, à expectativa de um tratamento formal que pode conduzir a simplificações ou a desvios deformadores.

Com efeito, argumentando de modo radical e baseando-se em inegáveis sucessos locais da utilização da formalização matemática, Bunge (1973), por exemplo, pretende estabelecer as vantagens e a imprescindibilidade da axiomatização, a ausência de alternativas para a concepção de teorias enquanto aparatos formais e até mesmo a inevitabilidade do tratamento axiomático no estabelecimento das relações entre teorias. Após examinar exemplos de axiomatização de teorias como a da gravitação ou a das redes elétricas, ele conclui, categórico:”

A seguir, Machado cita o seguinte trecho do livro *Filosofia da Física*, de Mario Bunge ([2, pg. 217]):

“Enquanto se mantiver o princípio absurdo de que uma teoria científica não é um sistema hipotético-dedutivo, mas uma síntese indutiva, uma metáfora ou seja o que for, e enquanto houver uma relutância irracionalista em relação à axiomática, não podem esperar-se avanços decisivos no estudo das relações interteóricas. E enquanto não estiverem disponíveis cuidadosas histórias de casos ou uma teoria geral, deveríamos abster-nos de espremer as relações interteóricas para sumo filosófico.”

É um tanto grotesco que Machado pretenda criticar um livro profundo e complexo como [2] afirmando algumas baboseiras a respeito da teoria das alegorias (veja página 26 para detalhes). Não concordo¹⁷ necessariamente com tudo que Bunge escreve em [2] e acredito que seria bem possível construir críticas a várias de suas posições filosóficas. No entanto, é bem claro que Bunge possui uma vasta cultura sobre Física, Fundamentos da Matemática e Filosofia da Ciência; seus argumentos em [2] são muito ponderados e bem elaborados. Selecionamos vários trechos de [2] para tentar

¹⁷Na verdade, meus precários conhecimentos de Física não me permitem opinar de forma inteligente sobre boa parte das teses que Bunge defende em [2].

mostrar ao leitor o quão distorcida é a forma como Machado citou Bunge em [8, pg. 136].

Em primeiro lugar, deve-se entender que o livro [2] de Bunge trata sobre filosofia da Física e é absolutamente claro pelo contexto que a sua defesa do método axiomático em [2] refere-se à *Física* e não a todas as áreas do conhecimento humano (como as ciências políticas, por exemplo). Na primeira seção de [2, Capítulo 7], Bunge discute o que ele considera os três caminhos de abordagem a uma teoria física: o histórico, o heurístico e o axiomático. Veja, por exemplo, o seguinte trecho¹⁸ ([2, pg. 136]):

“Contudo, não existe qualquer conflito entre as três abordagens à exposição da teoria: cada uma ilumina uma faceta diferente de um objecto complexo e cada uma tem o seu próprio objectivo. A primeira está interessada na biografia de uma teoria, a segunda nas suas capacidades e realizações, e a terceira naquilo que pode ser chamado o seu carácter: os seus fundamentos, no tocante à estrutura e ao conteúdo. Por conseguinte, seria errado pretender que qualquer das três abordagens seja absolutamente superior a cada uma ou a ambas outras. As três abordagens são mutuamente complementares e, conseqüentemente, uma educação científica bem torneada, mesmo que esteja centrada no formato heurístico ou intuitivo, devia dar uma ideia dos extremos do caos histórico e da regularidade axiomática.

Não defenderei a abordagem heurística, porque é empregue universalmente. Nem defenderei a abordagem histórica, dado que qualquer especialista científico educado gosta de dar uma olhadela para a história do seu assunto. Defenderei antes a impopular causa da axiomática, que é amplamente mal compreendida e dificilmente praticada fora das matemáticas.”

Não parece realmente que Bunge esteja sendo radical aqui. Ele pondera entre essas três abordagens a uma teoria física e explica que não vê necessidade de defender as abordagens histórica e heurística, porque já são suficientemente populares entre aqueles físicos “mais pragmáticos” que interessam-se pouco por questões filosóficas e de fundamentos da sua ciência. Logo no início de [2, Capítulo 8], Bunge mostra sua compreensão da idéia de que não é razoável que as axiomatizações de teorias físicas sejam entendidas no mesmo sentido que o são em Matemática ([2, pg. 159]):

“Apresentamos agora dois espécimens comparativamente simples de axiomática física. Deve notar-se que são necessariamente diferentes em aspectos importantes dos sistemas axiomáticos na matemática pura. Efectivamente, enquanto os últimos definem famílias inteiras de objectos ou estruturas formais, tais como grades ou espaços topológicos, os nossos sistemas axiomáticos visam caracterizar (não definir) espécies de objectos concretos, nomeadamente sistemas físicos, os quais supostamente levam uma existência

¹⁸As citações a Bunge estão sendo copiadas *ipsis literis* de uma tradução para o português (de Portugal) do original em inglês, *Philosophy of Physics*. Observamos que a tradução não é grande coisa e contém alguns erros.

independente. Por conseguinte, enquanto o axiomatizador matemático fia a sua teia sem se importar com o mundo real, o axiomatizador físico está ligado à terra.

Isto é, visto que a axiomática física irá pedir emprestadas todas as ideias matemáticas que forem necessárias, ela não pode macaquear em todos os pontos o estilo de axiomatização adequada para a matemática pura, que se reduz a definir alguns predicados complexos habitualmente construídos com componentes teorico-conjuntais. Assim, seria errado introduzir o conceito de uma rede elétrica através de uma estipulação com esta:

Definição: *A estrutura $\mathcal{G} = \langle G, T, V, e, i, R, C, L, M \rangle$, onde G e T são conjuntos, V , e e i funções sobre $G \times T$, R , C e L funções sobre G , e M uma função sobre $G \times G$, é uma rede eléctrica se e somente se [aqui vem uma lista de axiomas caracterizando o estatuto matemático e as relações mútuas dos primitivos registrados G , T , etc.]”*

A seguir, Bunge apresenta uma proposta de axiomatização da teoria das redes eléctricas de Kirchhoff–Helmholtz ([2, pgs. 160—162]) e uma proposta de axiomatização da teoria clássica da gravitação ([2, pgs. 163—166]). Em [2, pgs. 169—174], Bunge discute as propriedades que considera desejáveis e as que considera indesejáveis para as axiomatizações das teorias físicas. Em [2, pgs. 175—179] Bunge apresenta uma grande lista do que considera vantagens da axiomatização em Física e em [2, pgs. 180—183] explica de forma didática (sob a forma de perguntas e respostas) seus argumentos contra as diversas objeções mais freqüentes à adoção do método axiomático na Física. Não queremos aborrecer mais o leitor citando trechos excessivamente longos, mas é bastante claro que na sua defesa do emprego do método axiomático na Física Bunge se baseia em muito mais do que apenas os “inegáveis sucessos locais da utilização da formalização matemática”, como afirma Machado.

Em [2, pgs. 183,184], Bunge ainda apresenta uma visão equilibrada sobre as relações entre o método axiomático e o ensino da Física; veja, por exemplo, esse trecho ([2, pg. 183]):

“A axiomática não é planeada para o principante: antes de se poder pôr ordem num assunto, aquele deveria tê-lo apreendido de um modo informal ou heurístico. Uma exposição prematura à axiomática pode resultar em incompreensão ou aborrecimento. Testemunham-no o ensino da geometria euclideana durante séculos, antes de se ter descoberto que as crianças não eram adultos em escala pequena.”

Nas observações finais do seu Capítulo 8, Bunge mostra novamente uma visão ponderada sobre o uso do método axiomático ([2, pgs. 184,185]):

*“Axiomatizar é apenas maximizar a explicitação e a articulação. **Aqueles que não cuidam de ambas não precisam de se preocupar com a axiomática**, mas aqueles que se importam não se aplicarão pouco ou, pelo menos, tolerarão aqueles que tentam organizar os produtos um tanto ou quanto desordenados da investigação original.*

Ninguém deveria estimar a axiomática na ciência como superior à criação de novas teorias poderosas. Sem embargo, uma axiomatização adequada de uma teoria boa, mas controversa, não é certamente menos válida do que o fabrico de uma teoria má e ignorada. A axiomatização não substitui a criação de teorias e não compete com elas, pelo contrário, culmina esse processo criativo. Como qualquer outro refinamento, a axiomatização é convincente, ou antes, ótima, mais do que indispensável para as finalidades diárias.

Contudo, assim como há ocasiões que exigem biscoitos e não pão, também na ciência existem algumas encruzilhadas onde a ordenação é mais válida do que a acumulação. Se o problema consiste em clarificar resultados teóricos e metodológicos, em analisar e avaliar teorias, e em estimar programas rivais de construção de teorias mais do que em elaborar e aplicar teorias existentes, então a axiomática deixa de ser um refinamento para se tornar uma necessidade de primeira ordem. Efectivamente, só se pode fazer um julgamento justo a teorias clara e plenamente formuladas.

Do mesmo modo, a axiomática pode ajudar mais à maturação da ciência física do que ao seu mero crescimento em volume. Na verdade, a axiomática realça a força e a clareza — por conseguinte, a exposição à análise crítica — que, juntamente com o aprofundamento e a ousadia, constituem a maturidade como distinta do simples tamanho (Bunge, 1968a). Finalmente, a axiomática pode ajudar-nos a enfrentar a explosão de informação ou, antes, o dilúvio. Porque, se não nos podemos manter a par com pormenores podemos, pelo menos, acompanhar o desenvolvimento da investigação fundamental num campo dado: os problemas fundacionais estão sempre “dentro” e raramente são de esperar soluções finais para eles.” (grifos nossos)

Finalmente, em [2, Capítulo 9], Bunge analisa a questão do estabelecimento de relações entre as várias teorias da Física (como o problema de se saber se uma teoria pode ser considerada como parte (subteoria) de outra e o problema de se entender a fundo o significado de afirmações do tipo “determinada teoria possui uma relação assintótica¹⁹ com outra”). É nas observações finais desse capítulo que aparece o trecho que Machado cita. Observo que os tipos de teorias entre as quais Bunge pretende estabelecer relações incluem teorias Físicas tão complexas (e pouco intuitivas) como a mecânica quântica (muito diferentes da “teoria” das redes de Machado que, a meu ver, não passa de uma mistura meio amorfa de observações banais, citações desconexas, trocadilhos com palavras e um pouco de obscuridade matemática). Nesse contexto, parece muito razoável que, para uma compreensão profunda de relações interteóricas, o recurso ao método axiomático seja muito adequado ou até mesmo imprescindível.

¹⁹Por exemplo, a cinemática clássica é normalmente vista como um limite da cinemática da relatividade especial quando as velocidades relativas envolvidas são muito menores do que a velocidade da luz.

2.2.2. René Thom.

...
[Seção ainda incompleta]

APÊNDICE A

Explicações simplificadas para alguns dos conceitos matemáticos que aparecem no livro

Neste apêndice farei um esforço sério para explicar de forma simplificada para o leitor não especialista alguns dos conceitos matemáticos mencionados no livro. Nosso esforço é no sentido de ir um pouco mais a fundo do que os livros de divulgação e as notícias de jornal, tentando ao mesmo tempo manter o texto compreensível para um leitor que não esteja acostumado com conceitos matemáticos sofisticados, mas que tem ao menos uma lembrança de algumas noções da Matemática da escola. É uma tarefa um tanto ingrata, já que os conceitos que estou pretendendo expor aqui em poucas páginas custam normalmente alguns bons anos de estudo para alunos de um curso de bacharelado em Matemática. Sem mais delongas, vamos ao trabalho.

A.1. As várias estruturas da Matemática

Nesta seção pretendo explicar ao leitor o significado a idéia de “estrutura” em Matemática, apresentando diversos exemplos: grupos, anéis, corpos, espaços métricos, espaços topológicos (na verdade, as noções de espaço métrico e de espaço topológico serão explicadas na Seção A.3). Antes de apresentar as definições matemáticas de tais conceitos, começaremos olhando para uma série de motivações e exemplos que provavelmente serão familiares ao leitor.

Considere o *conjunto dos números naturais*:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Informalmente falando, números naturais são aqueles que servem para designar o número de elementos de um conjunto finito (note que o zero é o número de elementos do conjunto vazio, que não possui elementos). Não estou interessado aqui em apresentar definições matemáticas rigorosas para os conjuntos numéricos, apenas apelarei para a familiaridade que muitos leitores provavelmente têm com os mesmos (vindas do senso comum ou da Matemática da escola).

No conjunto dos números naturais, pode-se definir as familiares operações da aritmética elementar: a adição e a multiplicação. Tais operações possuem várias propriedades. Entre elas, destacamos:

- *associatividade*: a operação de adição é associativa, isto é, $(x + y) + z = x + (y + z)$; também a operação de multiplicação é associativa, isto é $(xy)z = x(yz)$.
- *Comutatividade*: a operação de adição é comutativa, isto é, $x + y = y + x$; também a operação de multiplicação é comutativa, isto é, $xy = yx$.
- *Elemento neutro*: a operação de adição possui um elemento neutro, que é o número zero: temos $x + 0 = x$ e $0 + x = x$. Também a operação de multiplicação possui um elemento neutro, que é o número 1: temos $1 \cdot x = x$ e $x \cdot 1 = x$.

Um exemplo familiar ao leitor de uma operação que não é nem associativa nem comutativa é a potenciação; não é verdade que $x^y = y^x$ e nem é verdade que $(x^y)^z = x^{(y^z)}$. Por exemplo:

$$2^3 = 8, \quad 3^2 = 9 \neq 8,$$

e:

$$(2^3)^2 = 8^2 = 64, \quad 2^{(3^2)} = 2^9 = 512 \neq 64.$$

O leitor deve entender que por *operação* (ou *operação binária*) no conjunto dos números naturais entende-se qualquer regra que transforma um par x, y de números naturais num novo número natural (não faz sentido se restringir apenas àquelas operações que já tem um “nome no mercado”, como soma, multiplicação e potenciação). Por exemplo, poderia se inventar uma operação nova, fazendo-se:

$$x@y = x + y + xy.$$

Daí, por exemplo:

$$3@4 = 3 + 4 + 3 \cdot 4 = 19.$$

Essa operação @ é associativa, já que:

$$\begin{aligned} (x@y)@z &= (x + y + xy)@z = x + y + xy + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + xy + z + xz + yz + xyz, \\ x@(y@z) &= x@(y + z + yz) = x + y + z + yz + x(y + z + yz) \\ &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \\ &= x + y + xy + z + xz + yz + xyz; \end{aligned}$$

A operação @ também é comutativa, já que:

$$x@y = x + y + xy, \quad y@x = y + x + yx = x + y + xy.$$

Observe que o número zero também é um elemento neutro para @:

$$x@0 = 0@x = x + 0 + 0x = x.$$

Uma outra propriedade importante da operação de adição é a chamada:

- *Lei do cancelamento*: se é sabido que $x + z = y + z$, pode-se deduzir que $x = y$.

A multiplicação não satisfaz a lei de cancelamento; podemos ter $xz = yz$, sem que $x = y$ (por exemplo, $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$, mas $2 \neq 3$). No entanto, é verdade que se $xz = yz$ e se $z \neq 0$ então $x = y$.

A lei do cancelamento para a adição é muitas vezes “demonstrada” na escola através do argumento:

$$\begin{aligned} x + z = y + z &\implies (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) \\ &\implies x + (z + (-z)) = y + (z + (-z)) \\ &\implies x + 0 = y + 0 \implies x = y. \end{aligned}$$

No entanto, note que tal argumentação não é válida se tudo que se conhece são números naturais (o argumento exposto acima utiliza a “entidade” $-z$ que não é um número natural). A lei de cancelamento para a soma (assim como a associatividade e a comutatividade) podem ser demonstradas rigorosamente, utilizando indução matemática e os chamados *postulados de Peano*¹; omitiremos os detalhes, que não são muito relevantes aqui. Na verdade, o fato de que a lei do cancelamento é válida para a adição de números naturais é (num certo sentido) justamente o que possibilita a construção matemática do *conjunto dos números inteiros*:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

que inclui os *números negativos* $-1, -2, -3, \dots$. No conjunto dos números inteiros também define-se operações de adição e multiplicação. Essas operações são associativas, comutativas, possuem elemento neutro e satisfazem a lei do cancelamento (para ser mais preciso, no caso da multiplicação, temos que $xz = yz$ implica $x = y$ apenas se $z \neq 0$). Ocorre que a operação de adição no conjunto dos números inteiros satisfaz uma nova propriedade (que não era satisfeita pela adição no conjunto dos números naturais):

- *Propriedade do elemento inverso*: para todo x , existe y tal que $x + y$ (e $y + x$) é igual ao elemento neutro 0, isto é, $x + y = y + x = 0$.

Por exemplo, para $x = 5$, temos que $y = -5$ satisfaz $x + y = y + x = 0$. Note que se x é um número natural (diferente de zero) então não existe um número natural y tal que $x + y = 0$, isto é, a adição nos números naturais não tem a propriedade do elemento inverso. A operação de multiplicação no conjunto dos números inteiros não possui a propriedade do elemento inverso (se x é um número inteiro diferente de 1 e de -1 então não existe um número inteiro y tal que xy é o elemento neutro da multiplicação, isto é, tal que $xy = 1$). Por outro lado, considere o *conjunto dos números racionais*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0 \right\}.$$

No conjunto dos números racionais, temos definidas operações de adição e de multiplicação; ambas são associativas, comutativas, possuem elemento neutro e satisfazem a lei do cancelamento (a não ser pela observação usual

¹Os “postulados” de Peano podem ser encarados como postulados (axiomas) ou como teoremas, dependendo do contexto.

sobre a impossibilidade de se cancelar o zero na multiplicação). Agora a adição e a multiplicação possuem a propriedade do elemento inverso; na verdade, não é bem isso: a adição possui a propriedade do elemento inverso e a multiplicação possui a propriedade do elemento inverso, se ignorarmos o zero (isto é, se x é um número racional diferente de zero então existe um número racional y tal que $xy = yx = 1$).

Outros conjuntos numéricos que provavelmente são familiares ao leitor são o *conjunto dos números reais* \mathbb{R} (cuja definição matemática rigorosa é um tanto complicada e será totalmente omitida aqui) e o conjunto dos números complexos:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Tanto em \mathbb{R} como em \mathbb{C} temos definidas operações de adição e de multiplicação que são associativas, comutativas, possuem elemento neutro, satisfazem a lei de cancelamento e a propriedade do elemento inverso (observadas as exceções sobre o zero nas propriedades da multiplicação).

Além dos conjuntos numéricos, listo abaixo alguns outros objetos matemáticos para os quais definem-se noções naturais de adição e multiplicação, satisfazendo certas boas propriedades:

- *polinômios*: para fixar as idéias, falemos de polinômios com coeficientes reais que são, essencialmente, expressões da forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

onde a_0, a_1, \dots, a_n são números reais. Definem-se operações de adição e de multiplicação para polinômios com coeficientes reais. Ambas são associativas, comutativas, possuem elemento neutro (o polinômio nulo e o polinômio 1) e satisfazem a lei do cancelamento (exceto pelo fato que o polinômio nulo não pode ser cancelado na multiplicação). A adição possui a propriedade do elemento inverso, mas a multiplicação não².

- *matrizes*: para fixar as idéias, falemos de matrizes quadradas com entradas reais, de um tamanho fixado (n linhas e n colunas, por exemplo). Definem-se operações de adição e de multiplicação para matrizes e ambas são associativas; mas, enquanto a adição é comutativa, a *multiplicação não é*, como ilustramos abaixo no caso de matrizes dois por dois³:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

A adição possui um elemento neutro (a matriz nula, que tem todas as entradas iguais a zero), e a multiplicação também (a *matriz*

²Só é possível que $p(x)q(x) = 1$ se ambos os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ tem grau zero.

³Recorde-se da definição usual de multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}.$$

identidade, que possui 1's na diagonal principal e zeros fora dela). A adição satisfaz a lei do cancelamento e a propriedade do elemento inverso, mas a multiplicação não satisfaz nenhuma das duas. Por exemplo, as igualdades abaixo mostram que a lei do cancelamento para a multiplicação de matrizes dois por dois não vale:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poderíamos apresentar muitos outros exemplos, envolvendo construções mais complexas, mas esperamos que o que foi dito até agora seja suficiente para que o leitor perceba que em Matemática trabalha-se com diversos “tipos de objetos”, sobre os quais definem-se algumas operações, que satisfazem uma ou outra propriedade. Essas observações motivam as seguintes definições:

- um *grupo* é um conjunto munido de uma operação associativa, que possui elemento neutro e satisfaz a propriedade do elemento inverso;
- um *anel* é um conjunto munido de duas operações (que serão referidas como soma e multiplicação) satisfazendo as seguintes propriedades:
 - (a) a soma e a multiplicação são associativas;
 - (b) a soma é comutativa, possui elemento neutro e satisfaz a propriedade do elemento inverso;
 - (c) a multiplicação é *distributiva* com respeito à adição, isto é, $x(y + z) = xy + xz$ e $(y + z)x = yx + zx$.
- Um anel no qual a multiplicação possui um elemento neutro é chamado um *anel com unidade* e um anel no qual a multiplicação é comutativa é chamado um *anel comutativo*;
- um anel comutativo com unidade no qual a multiplicação satisfaz a lei do cancelamento (no sentido que $xz = yz$ e $z \neq 0$ implicam $x = y$) é chamado um *domínio de integridade*;
- um anel comutativo com unidade no qual a multiplicação possui a propriedade do elemento inverso (no sentido que todo $x \neq 0$ possui um elemento inverso) é chamado um *corpo*.

Em vista das definições acima, vemos que o conjunto dos números inteiros (munido da adição e multiplicação usuais) é um domínio de integridade, o conjunto dos números racionais, dos números reais e dos números complexos (munidos da adição e multiplicação usuais) são corpos e o conjunto dos números inteiros, racionais, reais ou complexos munidos da operação de adição usual são grupos. O conjunto dos polinômios com coeficientes reais é um domínio de integridade e o conjunto das matrizes quadradas (de tamanho fixado) e entradas reais é um anel com unidade (não comutativo). Falarei um pouco mais sobre grupos na Subseção A.1.1.

Mas, para que os matemáticos organizam seus objetos em estruturas? É um assunto um tanto complexo para se compreender num minicurso relâmpago, mas algumas palavras podem ser ditas. Em primeiro lugar, esse

tipo de organização permite compreender melhor quais teoremas dependem de quais propriedades. Em segundo lugar, quando provamos um teorema geral sobre anéis, por exemplo, sabemos que o enunciado demonstrado vale para qualquer anel (é como se tivéssemos demonstrado muitos teoremas ao mesmo tempo). Por exemplo, o *teorema fundamental da aritmética* é o teorema (sobre números inteiros) que diz que todo número inteiro maior do que 1 pode ser fatorado de modo único como um produto de inteiros primos positivos. Uma versão desse teorema pode, na verdade, ser enunciada e demonstrada em qualquer domínio de integridade que satisfaz algumas propriedades adicionais (os *domínios de ideais principais* ou os *domínios Euclidianos*, por exemplo) e, a partir daí, obtém-se automaticamente uma versão do teorema fundamental da aritmética para outros contextos (como o de polinômios com coeficientes racionais, por exemplo).

As estruturas explicadas ao longo desta seção são estruturas pertinentes à área da Matemática conhecida como *Álgebra* (ou *Álgebra Abstrata*). Mas nós mal raspamos a superfície do assunto. Existem muitas outras estruturas matemáticas na Álgebra e em várias outras áreas da Matemática (espaços métricos e topológicos, que serão discutidos na Seção A.3; outras estruturas são os *conjuntos ordenados*, os *espaços vetoriais*, os *módulos*, os *corpos ordenados*, os *espaços de medida*, as *variedades diferenciáveis* e muitas, muitas outras).

A.1.1. Grupos. Nesta subseção, olharemos mais de perto para a estrutura algébrica de *grupo* e aproveitamos também para discutir as noções de isomorfismo e homomorfismo.

Como vimos acima, um *grupo* é um conjunto G munido de uma operação associativa que possui um elemento neutro (que denotaremos por e) e satisfaz a propriedade do elemento inverso. O exemplo mais simples possível de grupo é o *grupo trivial* que possui um único elemento, o elemento neutro e ; a operação é definida da única forma possível, isto é, $ee = e$. Considere então um conjunto G que possui exatamente dois elementos, que serão denotados por e e a . Definimos:

$$ee = e, \quad ae = a, \quad ea = a, \quad aa = e.$$

O conjunto G , munido da operação definida pelas igualdades acima, é um grupo; o elemento inverso de e é o próprio e e o elemento inverso de a é o próprio a (o leitor pode, se quiser, gastar algum tempo convencendo-se de que a operação de G é de fato associativa). Considere agora um conjunto G com três elementos, e , a e b . Definimos uma operação em G fazendo:

$$(A.1.1) \quad \begin{aligned} ee &= e, & ea &= a, & eb &= b, \\ ae &= a, & aa &= b, & ab &= e, \\ be &= b, & ba &= e, & bb &= a. \end{aligned}$$

O conjunto G , munido dessa operação, é um grupo; o elemento inverso de e é e , o elemento inverso de a é b e o elemento inverso de b é a (o leitor

deve observar que a operação não pode ser definida de qualquer jeito⁴; por exemplo, se tivéssemos escolhido definir $bb = e$ em vez de $bb = a$ então a operação não seria associativa, já que $(bb)a = ea = a$ e $b(ba) = be = b$.

Os exemplos de grupos considerados até agora são todos grupos finitos. Um exemplo de grupo infinito é o conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros munido da operação de adição, ou o conjunto \mathbb{Q}^* dos números racionais diferentes de zero, munido da operação de multiplicação (em \mathbb{Z} com a operação de adição o elemento neutro é o zero e o elemento inverso de x é $-x$; em \mathbb{Q}^* com a operação de multiplicação o elemento neutro é 1 e o elemento inverso de x é $\frac{1}{x}$). Um outro exemplo importante de grupo é o *grupo dos inteiros módulo n* : se n é um inteiro positivo, denotamos por \mathbb{Z}_n o conjunto:

$$\{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Note que esse conjunto tem exatamente n elementos. Vamos definir uma operação em \mathbb{Z}_n , que será denotada por $\bar{+}$; essa operação *não* é a adição usual de números inteiros, embora seja similar a ela e por isso usamos o sinal de adição modificado $\bar{+}$ para denotá-la (note que somando dois elementos de \mathbb{Z}_n da maneira usual poderíamos obter como resultado um número inteiro que não está em \mathbb{Z}_n , o que não é permitido para uma operação em \mathbb{Z}_n). A operação $\bar{+}$ é definida assim: dados elementos x, y de \mathbb{Z}_n , somamos x com y (da maneira usual), dividimos o resultado por n e tomamos o resto dessa divisão como resultado da operação $x\bar{+}y$ (note que esse resto está sempre entre 0 e $n-1$). Por exemplo, para $n = 5$, temos:

$$3\bar{+}4 = 2, \quad 1\bar{+}2 = 3, \quad 4\bar{+}4 = 3, \quad 3\bar{+}2 = 0,$$

e assim por diante. O conjunto \mathbb{Z}_n , munido dessa operação $\bar{+}$, é um grupo com n elementos. O elemento neutro da operação $\bar{+}$ é o zero e o elemento inverso de x é $n-x$.

Vamos agora comparar o grupo de três elementos $\{e, a, b\}$ com o grupo de três elementos $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Temos:

$$(A.1.2) \quad \begin{array}{lll} 0\bar{+}0 = 0, & 0\bar{+}1 = 1, & 0\bar{+}2 = 2, \\ 1\bar{+}0 = 1, & 1\bar{+}1 = 2, & 1\bar{+}2 = 0, \\ 2\bar{+}0 = 2, & 2\bar{+}1 = 0, & 2\bar{+}2 = 1. \end{array}$$

O leitor deve observar a similaridade que existe entre a tabela (A.1.1) que define a operação de $\{e, a, b\}$ e a tabela (A.1.2) que define a operação de \mathbb{Z}_3 . Mais precisamente, se trocarmos 0 por e , 1 por a , 2 por b e $\bar{+}$ pela operação de $\{e, a, b\}$ na tabela (A.1.2) *obtemos exatamente a tabela* (A.1.1). Vemos então que os grupos $\{e, a, b\}$ e \mathbb{Z}_3 são *estruturalmente idênticos* a menos do “nome”

⁴Muito pelo contrário: nos casos específicos considerados até agora, por exemplo, não há nenhuma outra forma de se definir a operação em G de modo que se tenha um grupo.

dos seus elementos. Em outras palavras, a correspondência biunívoca:

$$\begin{aligned} 0 &\longleftrightarrow e \\ 1 &\longleftrightarrow a \\ 2 &\longleftrightarrow b \end{aligned}$$

entre os elementos de \mathbb{Z}_3 e os elementos de $\{e, a, b\}$ *preserva a estrutura de grupo*, ou seja, a operação. Pode-se pensar nessa correspondência biunívoca como uma espécie de “aparelho de tradução” entre a “linguagem” de \mathbb{Z}_3 e a “linguagem” de $\{e, a, b\}$. Se pegamos dois elementos do lado esquerdo (isto é, de \mathbb{Z}_3), operamos com os dois e empurramos o resultado para o lado direito (isto é, “traduzimos” o resultado para $\{e, a, b\}$), ou se primeiro empurramos os dois elementos para o lado direito (isto é, primeiro “traduzimos”) e operamos daquele lado, obtemos o mesmo resultado (por exemplo, começando com 1 e 2 do lado esquerdo, operamos $1\bar{+}2$, obtendo 0, que corresponde a e do lado direito; por outro lado, 1 corresponde a a , 2 corresponde a b e $ab = e$). Vamos colocar essas observações dentro do jargão matemático: considere a função:

$$f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \{e, a, b\}$$

definida por $f(0) = e$, $f(1) = a$, $f(2) = b$. Temos que f é bijetora (isto é, estabelece uma correspondência biunívoca) e que:

$$f(x\bar{+}y) = f(x)f(y),$$

para quaisquer elementos x, y de \mathbb{Z}_3 . Diz-se então que f é um *isomorfismo de grupos* e que os grupos \mathbb{Z}_3 e $\{e, a, b\}$ são *isomorfos* (isto é, estruturalmente indistinguíveis).

Em geral, se G, H são grupos quaisquer então uma função⁵ arbitrária $f : G \rightarrow H$ tal que:

$$f(xy) = f(x)f(y),$$

para quaisquer elementos x, y de G é chamada um *homomorfismo* de grupos (diz-se também que f *preserva* a operação de grupo). Nem todo homomorfismo é bijetor (os homomorfismos bijetores são precisamente os isomorfismos). Por exemplo, a função $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ que associa a cada número inteiro x o resto da divisão de x por n é um homomorfismo que não é bijetor (e portanto não é um isomorfismo); os grupos \mathbb{Z} e \mathbb{Z}_n não podem ser isomorfos, já que \mathbb{Z} é infinito e \mathbb{Z}_n é finito.

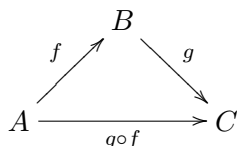
A noção de homomorfismo possui um análogo também na teoria dos anéis (ou dos domínios de integridade, ou dos corpos); nesses contextos, também se usa o nome “homomorfismo”, mas exige-se que a aplicação f “preserve” as *duas* operações, isto é, a adição e a multiplicação: mais explicitamente, exige-se que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e que $f(xy) = f(x)f(y)$.

⁵Isto é, uma regra que associa a cada elemento x de G um elemento $f(x)$ de H .

A.2. Teoria das categorias

Para compreender o material apresentado nesta seção, o leitor deve ter alguma familiaridade com os conceitos expostos na Seção A.1. *Categorias* podem ser vistas como estruturas matemáticas (tais como as discutidas na Seção A.1), mas na verdade um dos objetivos da teoria das categorias é desenvolver uma “teoria geral das estruturas”, no sentido de que cada “tipo de estrutura matemática” pode ser organizado numa categoria (no sentido técnico da palavra).

Geralmente, quando trabalhamos com determinado tipo de estrutura matemática, existe uma maneira natural de se selecionar um tipo especial de função que é “bem adaptada” a esse tipo de estrutura. No caso dos grupos, dos anéis, dos domínios de integridade ou dos corpos, essas funções são os *homomorfismos*⁶ (veja Subseção A.1.1). Em geral, a composição de funções “bem adaptadas” (num dado contexto) é novamente uma função “bem adaptada”. Essa idéia motiva a introdução do conceito de *categoria*. Uma categoria é constituída por *objetos* e por *morfismos* (também chamados de *flechas*). Um morfismo possui uma fonte (origem) e um destino (término), que também são chamados respectivamente de *domínio* e de *contra-domínio* do morfismo; o domínio e o contra-domínio de um morfismo são objetos da categoria. Se f é um morfismo com domínio A e contra-domínio B e g é um morfismo com domínio B e contra-domínio C então supõe-se definida a *composição* de f com g , denotada por $g \circ f$, que é um morfismo com domínio A e com contra-domínio C (supõe-se também que essa operação de composição de morfismos seja associativa e possua elementos neutros, num sentido adequado⁷). Essas composições são normalmente bem visualizadas em diagramas do seguinte tipo:



Por exemplo, a *categoria dos grupos* é a categoria cujos objetos são os grupos e cujos morfismos são os homomorfismos de grupos; a composição de morfismos é a usual composição de funções⁸. Similarmente, a *categoria dos anéis* é a categoria cujos objetos são os anéis e cujos morfismos são os

⁶No caso dos espaços métricos, que serão estudados na Seção A.3, essas funções são as *imersões isométricas* que satisfazem a condição $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. No caso dos espaços topológicos (também estudados na Seção A.3), essas funções são as *funções contínuas*.

⁷Mais precisamente, supõe-se que para cada objeto A da categoria exista um morfismo I_A com domínio A e contra-domínio A , talque $I_A \circ f = f$ e $g \circ I_A = g$, sempre que f for um morfismo com contra-domínio A e g for um morfismo com domínio A . O morfismo I_A é chamado *morfismo identidade* do objeto A .

⁸Recorde que a *composição* da função $f : A \rightarrow B$ com a função $g : B \rightarrow C$ é a função $g \circ f : A \rightarrow C$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in A$.

homomorfismos de anéis. A qualquer “tipo” de estrutura matemática está associada uma categoria; temos uma categoria dos domínios de integridade, uma categoria dos corpos, uma categoria dos espaços métricos e uma categoria dos espaços topológicos (e muitas outras). Um outro exemplo de estrutura matemática é a estrutura de *conjunto* que representa, em certo sentido, a “ausência de estrutura” (conjuntos podem ser pensados apenas como aglomerados de elementos; se S é um conjunto então qualquer x pode apenas pertencer ou não a S). Pode-se falar então também na *categoria dos conjuntos* cujos objetos são os conjuntos e cujos morfismos são as funções (arbitrárias, já que “não há estrutura para ser preservada”).

...

[Seção ainda incompleta]

A.2.1. Alegorias. Uma *alegoria* é uma categoria onde estão definidas certas operações na classe dos morfismos, sobre as quais assumem-se certas propriedades. As operações podem ser chamadas de *transposição* e de *interseção*; a transposição de um morfismo R é denotada por R° e a interseção de morfismos R, S é denotada por $R \cap S$. Se R tem como domínio um objeto A e como contra-domínio um objeto B então R° tem B como domínio e A como contra-domínio. A interseção $R \cap S$ só é definida quando o domínio de R é igual ao domínio de S e o contra-domínio de R é igual ao contra-domínio de S ; nesse caso, o domínio de $R \cap S$ é igual ao domínio de R (e de S) e o contra-domínio de $R \cap S$ é igual ao contra-domínio de R (e de S). Supõe-se que essas operações satisfaçam as seguintes propriedades:

- (1) $R^\circ = R$, se R é um morfismo identidade (veja nota de rodapé na página 41);
- (2) $(R^\circ)^\circ = R$, para qualquer morfismo R ;
- (3) $R \cap R = R$, $R \cap S = S \cap R$ e $(R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T)$, para quaisquer morfismos R, S, T , todos com o mesmo domínio e o mesmo contra-domínio;
- (4) $(R \circ S)^\circ = S^\circ \circ R^\circ$, para quaisquer morfismos R e S tais que o domínio de R seja igual ao contra-domínio de S ;
- (5) $(R \cap S)^\circ = R^\circ \cap S^\circ$, para quaisquer morfismos R, S com o mesmo domínio e o mesmo contra-domínio;
- (6) $(S \cap T) \circ R = (S \circ R) \cap (T \circ R) \cap ((S \cap T) \circ R)$, para quaisquer morfismos R, S, T , sendo que S, T tem o mesmo domínio e contra-domínio e o contra-domínio de R coincide com o domínio de S (e de T);
- (7) $(S \circ R) \cap T = (S \circ R) \cap T \cap [S \circ (R \cap (S^\circ \circ T))]$, para quaisquer morfismos R, S, T , onde o domínio de R é igual ao domínio de T , o contra-domínio de R é igual ao domínio de S e o contra-domínio de S é igual ao contra-domínio de T .

Ilustramos essa definição bastante técnica através de um exemplo: considere a categoria cujos objetos são os conjuntos e cujos morfismos com

domínio A e contra-domínio B são as *relações* de A em B , isto é, os subconjuntos R do produto cartesiano⁹ $A \times B$. Se R é uma relação de A para B e S é uma relação de B para C , definimos a *relação composta* $S \circ R$ declarando que um par (x, y) pertence a $S \circ R$ se existe um elemento $z \in B$ tal que (x, z) pertence a R e tal que (z, y) pertence a S (não é difícil verificar que essa lei de composição é associativa e que as usuais funções identidade funcionam como morfismos identidade, de modo que temos de fato uma categoria). Se R é uma relação de A para B , definimos a relação R° de B para A declarando que (x, y) pertence a R° quando (y, x) pertence a R (R° é obtida de R pela troca da ordem dos pares ordenados). A operação $R \cap S$ é definida simplesmente considerando-se a interseção usual dos conjuntos R e S . Não é muito difícil de se verificar que as propriedades (1)—(7) acima são satisfeitas, de modo que estamos realmente diante de um exemplo de alegoria.

A.3. Topologia

Em textos de divulgação (ou notícias de jornal), a área da Matemática conhecida como topologia é normalmente descrita como a área em que não se distingue objetos que podem ser deformados um no outro sem rasgar nem colar (diz-se, por exemplo, como anedota, que o topólogo é aquele matemático que não distingue a xícara de café do donut). Essa descrição, apesar de muito sucinta, não é ruim (seria ruim, no entanto, se um indivíduo matematicamente leigo, após ler uma descrição desse tipo, passasse a acreditar que realmente entendeu o que é topologia, ignorando o fato de que existem definições precisas e idéias bastante complexas por trás de tal caricatura). Nesta seção, procuraremos explicar ao leitor a noção de topologia e espaço topológico de forma um pouco mais aprofundada, mas sem entrar de cabeça em questões demasiadamente técnicas.

Para compreender adequadamente a noção de espaço topológico, é necessário antes de mais nada entender o que é um espaço métrico (na verdade, a noção de espaço métrico não é, estritamente falando, um pré-requisito para a compreensão da noção de espaço topológico, mas sem uma compreensão da noção de espaço métrico, a definição de espaço topológico pode ficar parecendo uma abstração sem sentido).

O leitor deve recordar que na geometria Euclideana fala-se em *distância* entre dois pontos; na verdade, a noção de distância em geometria Euclideana nada mais é que o modelo matemático para a familiar noção de distância que usamos no nosso dia-a-dia (medida, por exemplo, em centímetros, metros ou quilômetros). Quando se considera um sistema de coordenadas cartesianas no plano Euclideano, pode-se identificar seus pontos com pares ordenados (x, y)

⁹O produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) , com x em A e y em B . Se R é um subconjunto de $A \times B$, diz-se que um certo $x \in A$ possui a relação R com um certo $y \in B$ se o par (x, y) pertence ao conjunto R . Uma função $f : A \rightarrow B$ é nada mais que uma relação tal que para todo $x \in A$ existe precisamente um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

de números reais (as *coordenadas* do ponto, no sistema fixado). O conjunto de todos os pares ordenados de números reais é denotado normalmente por \mathbb{R}^2 (\mathbb{R} denota o conjunto dos números reais e \mathbb{R}^2 denota o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, isto é, o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) , com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$). Usando um sistema de coordenadas cartesianas, pode-se então identificar o plano da geometria Euclideana com o conjunto \mathbb{R}^2 . Utilizando o teorema de Pitágoras, mostra-se que a distância entre pontos (x, y) e (x', y') é dada pela fórmula:

$$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

onde d denota “distância”. Por exemplo, a distância entre o ponto $(0, 0)$ (a *origem* do sistema de coordenadas, onde os eixos se encontram) e o ponto $(3, 4)$ (o ponto com coordenadas $x = 3$ e $y = 4$) é dada por:

$$d((3, 4), (0, 0)) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

A noção de distância da geometria Euclideana satisfaz algumas propriedades, que são listadas abaixo.

- (a) $d(p, p) = 0$ e $d(p, q) > 0$, para $p \neq q$ (a distância entre um ponto e si mesmo é nula, e a distância entre pontos distintos é um número positivo);
- (b) $d(p, q) = d(q, p)$ (a distância entre dois pontos não depende da forma como os dois pontos são ordenados);
- (c) $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ (a chamada *desigualdade triangular* que afirma que o comprimento de um lado de um triângulo é menor ou igual à soma dos dois outros lados).

Poderia-se listar muitas outras propriedades da noção de distância da geometria Euclideana. No entanto, a experiência (“experiência” deve ser entendida como a “prática matemática do dia-a-dia”) mostra que essas propriedades são bastante fundamentais, no sentido de que são suficientes para se demonstrar diversos resultados interessantes. Toma-se então a seguinte atitude: vamos passar a estudar funções d que satisfaçam as propriedades (a), (b) e (c) acima, procurando descobrir que tipos de teoremas interessantes podem ser obtidos a partir daí. Um outro exemplo de uma função d que satisfaz (a), (b) e (c) é a *distância da soma*, também conhecida como *métrica do taxista*¹⁰:

$$d((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|.$$

Outros exemplos de funções d que satisfazem (a), (b) e (c) são a *distância do máximo* definida por:

$$d((x, y), (x', y')) = \text{máximo entre } |x - x'| \text{ e } |y - y'|,$$

¹⁰O nome vem da idéia de que essa distância é a que deve ser percorrida por um veículo que deseja ir do ponto (x, y) ao ponto (x', y') , mas não pode andar em outras direções além daquelas determinadas por “ruas” paralelas aos eixos coordenados.

e a exótica *distância zero-um* definida por:

$$d(p, q) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \neq q, \\ 0, & \text{se } p = q, \end{cases}$$

isto é, a distância entre pontos iguais é nula e a distância entre pontos diferentes é exatamente igual a 1, sejam lá quais forem os pontos (é um exercício mental instrutivo para o leitor convencer-se nesse momento que a distância zero-um realmente satisfaz as condições (a), (b) e (c)).

É possível também apresentar muitos exemplos de funções d satisfazendo as condições (a), (b) e (c) em contextos mais gerais, substituindo o plano Euclidiano \mathbb{R}^2 por outros objetos, tais como:

- o espaço \mathbb{R}^n das n -uplas (x_1, x_2, \dots, x_n) de números reais¹¹ que corresponde a idéia de um espaço com um número fixado arbitrário n de “eixos de coordenadas”;
- superfícies (de duas ou mais dimensões), tais como esferas ou toros (o “donut”);
- espaços mais abstratos como espaços cujos “pontos” são *funções*¹².

Tais considerações, nos levam à definição formal de espaço métrico; um *espaço métrico* é um conjunto M (de natureza arbitrária, mas cujos elementos serão pensados intuitivamente como “pontos”), no qual está definida uma função d (que associa um número real $d(p, q)$ a cada par de pontos $p, q \in M$), satisfazendo as propriedades (a), (b) e (c) acima.

Falando de forma simplificada, um espaço métrico é um “ambiente de trabalho”, onde faz sentido falar em distância entre dois pontos, sendo que essa noção de distância satisfaz uma lista de propriedades razoáveis (propriedades (a), (b) e (c)).

Uma noção importante que se estuda na teoria dos espaços métricos é a noção de função contínua. Se M_1, M_2 são espaços métricos (com noções de distância respectivamente denotadas por d_1 e d_2) então uma função¹³ $f : M_1 \rightarrow M_2$ é dita *contínua* quando leva “pontos próximos em pontos próximos”, isto é, se x, y são pontos de M_1 tais que a distância $d_1(x, y)$ é “pequena” então a distância $d_2(f(x), f(y))$ entre os pontos correspondentes $f(x), f(y)$ também é “pequena”. Uma visualização geométrica da idéia de função contínua é a de “regra de transformação” do objeto M_1 no objeto M_2 “sem rasgar” (quando “rasgamos” M_1 , então dois pontos x, y próximos ao local que está sendo rasgado corresponderam a pontos $f(x),$

¹¹Quando $n = 2$, obtêm-se novamente o plano Euclidiano \mathbb{R}^2 ; quando $n = 3$, obtêm-se o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , modelo matemático para nosso familiar espaço físico tridimensional. Para $n = 1$, obtêm-se simplesmente a reta real unidimensional \mathbb{R} .

¹²Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais de variável real, pode-se pensar em definir a distância entre f e g como sendo (algo parecido com) o máximo valor de $|f(x) - g(x)|$, com $x \in \mathbb{R}$, isto é, “o maior erro que se comete” quando se troca $f(x)$ por $g(x)$.

¹³Isto é, uma “regra” que associa a cada ponto x de M_1 um ponto $f(x)$ de M_2 .

$f(y)$ de M_2 que não são mais próximos). A definição matematicamente precisa do conceito de função contínua (sem usar palavras vagas como “pequeno” ou “próximo”) é um tanto intrincada demais para ser compreendida num minicurso relâmpago como o que se pretende apresentar neste apêndice¹⁴. Funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também podem ser entendidas informalmente como aquelas cujo gráfico pode ser desenhado “sem tirar o lápis do papel”. Por exemplo, funções familiares como os polinômios, ou as funções vindas da trigonometria (seno e cosseno) são contínuas (um exemplo de função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que não é contínua é o seguinte: definimos $f(x) = 1$ quando x é positivo e $f(x) = 0$ quando x não é positivo).

Uma outra noção definida na teoria dos espaços métricos é a de *conjunto aberto* (a mesma está, como veremos logo adiante, intimamente ligada à noção de função contínua). Um subconjunto U de um espaço métrico M (quando M é o plano Euclidiano \mathbb{R}^2 , pode-se visualizar U como sendo uma “região” do plano) é dito *aberto* quando “não contém nenhuma porção de sua própria fronteira”. Por exemplo, se M é a reta real \mathbb{R} (munida da noção de distância usual) então o intervalo $]0, 1[$ (números reais x com $0 < x < 1$) é um conjunto aberto (não contém nenhum dos pontos da sua fronteira, isto é, os pontos 0 e 1), enquanto que o intervalo $[0, 1]$ (números reais x com $0 \leq x \leq 1$) ou o intervalo $[0, 1[$ (números reais x com $0 \leq x < 1$) não são conjuntos abertos. Conjuntos abertos podem também ser entendidos como sendo aqueles em que vale o seguinte: se um ponto x pertence ao conjunto então temos uma “margem de segurança” em torno de x , formada apenas por pontos pertencentes ao conjunto¹⁵. Por exemplo, se x pertence a $]0, 1[$, temos uma “margem de segurança” (medindo x para o lado esquerdo e $1 - x$ para o lado direito) em torno de x , formada só por pontos de $]0, 1[$; por outro lado, em $[0, 1]$, se partirmos do ponto $x = 1$, não há margem de segurança: caímos fora do conjunto $[0, 1]$, por pouco que andemos para o lado direito.

Temos um importante teorema que relaciona as noções de função contínua e de conjunto aberto. O teorema diz que, se $f : M_1 \rightarrow M_2$ é uma função, então f é contínua precisamente quando para todo subconjunto aberto U de M_2 , vale que a *imagem inversa* $f^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto de M_1 . A imagem inversa $f^{-1}(U)$ é, por definição, o conjunto de todos os pontos x de M_1 tais que o ponto correspondente $f(x)$ em M_2 pertence ao conjunto U . Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = x^3$ então a

¹⁴Em todo caso, para quem quiser contemplar a definição correta, aqui está: uma função $f : M_1 \rightarrow M_2$ é dita *contínua* se para todo ponto $x \in M_1$ e para todo número real positivo ε , existe um número real positivo δ tal que para todo ponto $y \in M_1$ com $d_1(x, y) < \delta$, é o caso que $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

¹⁵A definição rigorosa não é tão complicada de se entender: um subconjunto U de um espaço métrico M é dito *aberto* quando para todo ponto $x \in U$ existe um número real positivo r tal que todo ponto y de M com $d(x, y) < r$ está ainda em U .

imagem inversa $f^{-1}(U)$ do conjunto aberto $U =]8, 27[$ é o conjunto (também aberto) $]2, 3[$ (pois $8 < x^3 < 27$ justamente quando $2 < x < 3$)¹⁶.

Uma consequência importante do teorema explicado acima é a de que é possível compreender a noção de função contínua sem fazer referência direta à noção de distância, desde que seja permitida a referência à noção de conjunto aberto. Em outras palavras, um indivíduo que não sabe medir distâncias mas que sabe, de alguma forma, distinguir conjuntos abertos de conjuntos que não são abertos, seria capaz de testar se uma dada função é ou não contínua. Essa observação leva à noção de *espaço topológico*, que é, intuitivamente falando, um espaço no qual, embora não seja necessariamente possível medir distâncias, é possível distinguir conjuntos abertos de conjuntos não abertos. A definição precisa de espaço topológico fala sobre um conjunto X onde são privilegiados¹⁷ alguns subconjuntos, que serão chamados de *abertos*; sobre a coleção privilegiada de conjuntos abertos, são feitas algumas hipóteses, que tentam de alguma forma capturar a idéia central da noção de conjunto aberto que aparecia na teoria dos espaços métricos¹⁸. Na teoria dos espaços topológicos, define-se então a noção de função contínua como sendo aquela tal que a imagem inversa $f^{-1}(U)$ é um conjunto aberto, sempre que U for um conjunto aberto. Temos então que todo espaço métrico pode ser naturalmente visto como um espaço topológico (sendo que a noção de função contínua da teoria dos espaços topológicos estende a noção de função contínua da teoria dos espaços métricos); no entanto, existem espaços topológicos que não são espaços métricos¹⁹ (espaços ditos *não metrizáveis*).

A topologia pode então ser entendida como a área da Matemática que estuda os espaços topológicos e as funções contínuas. O que isso tem a ver então com aquela frase “a área em que não se distingue objetos que podem ser deformados um no outro sem rasgar nem colar”? Algumas explicações adicionais são necessárias para se entender a relação entre essa noção mais informal de topologia explicada em livros de divulgação e a noção mais rigorosa, que tentamos descrever nesta seção.

Considere espaços topológicos X e Y . Quando pode-se dizer que X e Y são “indistinguíveis” (do ponto de vista da topologia)? Quando for possível

¹⁶Intuitivamente, se f é contínua, U é um subconjunto aberto de M_2 e x é um ponto de $f^{-1}(U)$ (de modo que $f(x)$ está em U) então, para um ponto y de M_1 “próximo” de x , teremos que $f(y)$ é “próximo” de $f(x)$ (pois f é contínua) e portanto $f(y)$ também estará em U (pois U é aberto); logo y está em $f^{-1}(U)$, ou seja, $f^{-1}(U)$ é aberto.

¹⁷Isto é, uma coleção τ de subconjuntos de X é escolhida: a coleção τ é justamente chamada a *topologia* de X .

¹⁸Supõe-se que: a) o conjunto X e o conjunto vazio \emptyset são abertos; b) a união de uma coleção arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto; c) a interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto. Demonstra-se que todas essas propriedades são satisfeitas para a noção de conjunto aberto que aparece na teoria dos espaços métricos.

¹⁹Um exemplo (um tanto trivial) de espaço topológico não metrizável é obtido assim: toma-se um conjunto X que tem pelo menos dois pontos e declaram-se abertos apenas o conjunto vazio e o conjunto X .

identificar os pontos de X com os pontos de Y (através de uma correspondência biunívoca), de modo que, levando em conta tal identificação, os conjuntos abertos de X coincidam com os conjuntos abertos de Y . Essa consideração nos leva naturalmente à noção de *homeomorfismo*: um homeomorfismo entre X e Y é uma função bijetora $f : X \rightarrow Y$ (isto é, uma regra que estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos de X e os pontos de Y) tal que tanto f como a função inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ leva conjuntos abertos em conjuntos abertos ($f(U)$ é aberto em Y sempre que U for aberto em X e $f^{-1}(V)$ é aberto em X sempre que V for aberto em Y). Temos então que um homeomorfismo nada mais é que uma *função bijetora, contínua, cuja função inversa também é contínua*.

Dois espaços topológicos X e Y são ditos *homeomorfos* quando existe um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$. Vemos então que espaços topológicos homeomorfos são espaços “indistinguíveis” (do ponto de vista da topologia). Por outro lado, um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ pode também ser visualizado geometricamente como uma transformação que deforma X sobre Y sem “rasgar” (pois f é contínua) e nem “colar” (pois a função inversa f^{-1} é contínua; note que a função f realiza uma “colagem” precisamente quando a função inversa f^{-1} “rasga”).

A.3.1. A xícara de café e o donut. Uma xícara de café e um donut (ou, mais precisamente, espaços topológicos com tais formatos) são indistinguíveis do ponto de vista da topologia (isto é, são homeomorfos) pois podem ser deformados um no outro sem rasgar nem colar. O ponto fundamental aqui é justamente a asa da xícara (uma xícara sem asa *não é* homeomorfa a um donut). O leitor deve tentar imaginar um xícara feita de massa de modelar e na deformação da xícara no donut, sendo que o “buraco” determinado pela asa da xícara dá justamente origem ao “buraco” do donut.

A.4. O número áureo

Referências Bibliográficas

- [1] M. S. Biembengut, *Número de Ouro e Secção Áurea: Considerações e Sugestões para a Sala de Aula*, Editora da FURB, 1996.
- [2] M. Bunge, *Filosofia da Física*, Edições 70, coleção “O Saber da Filosofia” (traduzido do original em inglês: *Philosophy of Physics*, 1973).
- [3] N. Crato, *O educuês em discurso directo*, 5^a edição, Gradiva, 2006.
- [4] R. Dawkins, *O capelão do Diabo*, Companhia das Letras, 2005.
- [5] P. J. Freyd & A. Scedrov, *Categories, Allegories*, North-Holland mathematical library, vol. 39, 1990.
- [6] H. Gardner, *Multiple intelligences*, New York, BasicBooks, 1993.
- [7] P. Lévy, *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*, Rio de Janeiro, ed. 34, 1993.
- [8] N. J. Machado, *Epistemologia e didática*, 6^a edição, Cortez, 2005.
- [9] A. Sokal & J. Bricmont, *Imposturas intelectuais*, 2^a edição, Record, 2001.