O PROBLEMA DOS ENVELOPES

DANIEL V. TAUSK

1. O problema

São dados dois envelopes contendo dinheiro. A quantia que está num envelope é o dobro da quantia que está no outro envelope. Seja x a quantia que está no envelope com menos dinheiro, de modo que a quantia que está no outro envelope é $2x$. Um indivíduo sorteia um dos dois envelopes (de forma equiprovável). Se o indivíduo ficar com a quantia que está no envelope escolhido, o valor esperado de seu ganho é:

$$\frac{x + 2x}{2} = \frac{3}{2}\,x.$$

Se é oferecido a esse indivíduo a opção de trocar de envelope, o que ele deve fazer? A estratégia em que se fica com o primeiro envelope (i.e., recusa-se a troca) produz um valor esperado de ganho de $\frac{3}{2}\,x$ e a estratégia em que se troca de envelope (i.e., aceita-se a troca) produz um valor esperado de ganho também de $\frac{3}{2}\,x$. Assim, não faz diferença (no que concerne o valor esperado de ganho) em se aceitar ou não a troca.

No entanto, o raciocínio explicado a seguir sugere que aceitar a troca produz um valor esperado de ganho maior do que aquele que se obtém se a troca for recusada. Consideremos um outro jogo. Suponha que um indivíduo esteja de posse de um envelope contendo uma quantia y. Em frente a ele, há um outro envelope que possui probabilidade $\frac{1}{2}$ de conter a quantia $2y$ e probabilidade $\frac{1}{2}$ de conter a quantia $\frac{y}{2}$. Se o indivíduo que possui o envelope contendo a quantia y opta por trocar o seu envelope pelo outro envelope (com a quantia desconhecida), qual será o valor esperado de seu ganho? O valor esperado da quantia do outro envelope é:

$$\frac{2y + \frac{y}{2}}{2} = \frac{5}{4}\,y, \tag{1.1}$$

de modo que o valor esperado de ganho é $\frac{5}{4}\,y - y = \frac{1}{4}\,y > 0$.

Comparemos esse segundo jogo agora com o primeiro: no primeiro jogo, o indivíduo possui um envelope (aquele que ele escolheu) contendo uma quantia y (x ou $2x$). Se ele escolheu o envelope com menos dinheiro (a probabilidade de isso ocorrer é $\frac{1}{2}$), então o outro envelope contém a quantia $2y$; por outro lado, se ele escolheu o envelope com mais dinheiro (a probabilidade de isso ocorrer é $\frac{1}{2}$), então o outro envelope contém a quantia $\frac{y}{2}$.

Date: 23 de julho de 2008.

Aparentemente, estamos numa situação idêntica à do segundo jogo e seria então vantajoso (ao menos no que diz respeito a valor esperado de ganho) aceitar a troca.

Na verdade, o segundo raciocínio é incorreto e o primeiro é correto: realmente não há vantagem (em termos de valor esperado) em aceitar a troca. Esse ponto será explicado em detalhes na seção seguinte, usando a linguagem de variáveis aleatórias.

2. Uma modelagem mais rigorosa do problema

Consideremos o experimento aleatório em que se sorteia uma quantia $x \in \mathbb{R}$ (usando uma certa distribuição de probabilidades) e cria-se dois envelopes: o envelope número 1, contendo a quantia x e o envelope número 2, contendo a quantia $2x$. Em seguida, sorteia-se um desses dois envelopes (de modo equiprovável). Denotemos por X a variável aleatória que corresponde à quantia sorteada (i.e., a quantia que está no envelope número 1) e por ϵ a variável aleatória que corresponde ao número do envelope sorteado. A variável aleatória ϵ assume os valores 1 e 2, ambos com probabilidade $\frac{1}{2}$:

$$P(\epsilon = 1) = P(\epsilon = 2) = \frac{1}{2}.$$

A variável aleatória X possui uma distribuição qualquer, mas assumimos que a sua esperança $\mu = E(X)$ seja finita. Assumimos também que as variáveis aleatórias X e ϵ sejam independentes[1]. Seja agora Y a variável aleatória que dá a quantia que está no envelope sorteado e Z a variável aleatória que dá a quantia que está no envelope que não foi sorteado. Temos:

$$Y = X\chi_{[\epsilon=1]} + 2X\chi_{[\epsilon=2]}, \quad Z = 2X\chi_{[\epsilon=1]} + X\chi_{[\epsilon=2]},$$

onde χ_A denota a função característica de um evento A. Temos:

$$E(Y) = E(Y|\epsilon = 1)P(\epsilon = 1) + E(Y|\epsilon = 2)P(\epsilon = 2) \tag{2.1}$$

$$= E(X|\epsilon = 1)P(\epsilon = 1) + E(2X|\epsilon = 2)P(\epsilon = 2) \tag{2.2}$$

$$= E(X)P(\epsilon = 1) + E(2X)P(\epsilon = 2) = \mu\tfrac{1}{2} + 2\mu\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}\,\mu. \tag{2.3}$$

Na primeira igualdade em (2.2) usou-se que Y coincide com X no envento $[\epsilon = 1]$ e Y coincide com $2X$ no evento $[\epsilon = 2]$. Na primeira igualdade em (2.3) usou-se que X e ϵ são independentes. Podemos calcular a esperança de Z usando um raciocínio similar:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(Z|\epsilon = 1)P(\epsilon = 1) + E(Z|\epsilon = 2)P(\epsilon = 2) \\ &= E(2X|\epsilon = 1)P(\epsilon = 1) + E(X|\epsilon = 2)P(\epsilon = 2) \\ &= E(2X)P(\epsilon = 1) + E(X)P(\epsilon = 2) = 2\mu\tfrac{1}{2} + \mu\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}\,\mu. \end{aligned}$$

[1] Pode-se pensar que o espaço de probabilidade Ω em que as variáveis aleatórias X e ϵ estão definidas é o produto $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$, munido da medida de probabilidade produto de uma medida de probabilidade dada em $\mathbb{R}$ pela medida de probabilidade uniforme em $\{1, 2\}$. A variável $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é então a primeira projeção e a variável $\epsilon : \Omega \to \{1, 2\}$ é a segunda projeção.

Assim:

$$E(Y) = E(Z) = \frac{3}{2}\,\mu.$$

Esse resultado coincide com aquele obtido no primeiro raciocínio apresentado na Seção 1.

Analisemos agora o segundo raciocínio apresentado na Seção 1 usando a linguagem introduzida nesta seção. Se o evento $[\epsilon = 1]$ ocorre, temos que Y coincide com X e Z com $2X$, de modo que Z coincide com $2Y$; por outro lado, se o evento $[\epsilon = 2]$ ocorre, temos que Y coincide com $2X$ e Z com X, de modo que Z coincide com $\frac{Y}{2}$. Os eventos $[\epsilon = 1]$ e $[\epsilon = 2]$ possuem probabilidade $\frac{1}{2}$ e aparentemente o valor esperado de Z seria a média aritmética do valor esperado de $2Y$ com o valor esperado de $\frac{Y}{2}$, o que dá $\frac{5}{4}$ do valor esperado de Y (como em (1.1)). Escrevendo isso de forma mais cuidadosa, torna-se evidente o erro nesse raciocínio:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(Z|\epsilon = 1)P(\epsilon = 1) + E(Z|\epsilon = 2)P(\epsilon = 2) \\ &= E(2Y|\epsilon = 1)P(\epsilon = 1) + E\big(\tfrac{Y}{2}|\epsilon = 2\big)P(\epsilon = 2). \end{aligned}$$

Para se chegar à conclusão incorreta $E(Z) = \frac{5}{4}E(Y)$ nós deveríamos agora trocar $E(2Y|\epsilon = 1)$ por $E(2Y)$ e $E\big(\frac{Y}{2}|\epsilon = 2\big)$ por $E\big(\frac{Y}{2}\big)$, obtendo:

$$E(2Y)P(\epsilon = 1) + E\big(\tfrac{Y}{2}\big)P(\epsilon = 2) = 2E(Y)\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}E(Y)\tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{4}E(Y).$$

Mas nós não podemos fazer isso, *pois as variáveis aleatórias ϵ e Y não são independentes*! De fato, já que Y e X coincidem sobre o evento $[\epsilon = 1]$, temos:

$$E(Y|\epsilon = 1) = E(X|\epsilon = 1) = E(X) = \mu,$$

já que ϵ e X *são* independentes. No entanto:

$$E(Y) = \frac{3}{2}\,\mu \neq \mu = E(Y|\epsilon = 1).$$

Note que, na Seção 1, ao apresentarmos o segundo jogo, consideramos que o sorteio (entre $2y$ e $\frac{y}{2}$) para a quantia do outro envelope era feito de forma independente da escolha da quantia y (que o indivíduo já possuia no seu envelope). *Nesse cenário* seria realmente vantajoso (no que concerne o valor esperado) aceitar a troca.