Solenoide: (seguindo notas de J. Milnor)

$*$ Endomorfismos expansivos do círculo: examplo: $z \overset{E_2}{\longmapsto} z^2$ em $S^1 := \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$.

A gente mostrou a existência de uma semi-conjugação π :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2^+ & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2^+ \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ S^1 & \xrightarrow{E_2} & S^1 \end{array}$$

onde $\sigma : \Sigma_2^+ \longrightarrow \Sigma_2^+$ é o shift (deslocamento).

Lembra que π é quase uma conjugação : infelizmente, $\pi(0.011000\ldots) = \pi(0.01011111\ldots)$

então π não é bijetiva.

$*$ Extensão: Seja $F_0 : \begin{array}{ccc} S^1 \times \mathbb{C} & \longrightarrow & S^1 \times \mathbb{C} \\ (z, w) & \longmapsto & (z^2, \lambda w) \end{array}$, para λ constante, $0 < |\lambda| < 1$

Qual é a dinâmica? Qualquer órbita se aproxima do círculo $S^1 \times \{0\}$, porque $w \mapsto \lambda w \mapsto \lambda^2 w \mapsto \ldots$ converge para 0.

Vamos "perturbar" essa situação com a introdução de um termo εz, isto é, vamos considerar agora $F_\varepsilon(z, w) := (z^2, \varepsilon z + \lambda w)$.

Primeira simplificação:

exercício: mostre que F_ε é conjugada a $F_1(z,w)=(z^2, z+\lambda w)$.

Resp: Seja $L:(z,w)\mapsto\left(z,\frac{w}{\varepsilon}\right)$, então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
(z,w) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "F_\varepsilon"'] & \left(z,\frac{w}{\varepsilon}\right) \arrow[d, "F_1"] \\
(z^2, \varepsilon z+\lambda w) \arrow[r, mapsto] & \left(z^2, z+\frac{\lambda}{\varepsilon}w\right)
\end{tikzcd}$$

Isso significa que podemos simplesmente estudar a dinâmica de F_1.

Dinâmica de F_1:

Seja $T\subset S^1\times\mathbb{C}$ o toro solido definido por: $T=\{(z,w)\mid z\in S^1\subset\mathbb{C} \text{ e } |w|\leq c\}$,

onde $c\geq 2$ é definido da seguinte maneira: ① Se $|\lambda|<1/2$, então $c=2$;
② se não: c é escolhido tal que $1+c|\lambda|<c$.

Proposição: Cada órbita de F_1 em $S^1\times\mathbb{C}$ eventualmente entra em T, e a imagem $F_1(T)$ é estritamente contida em $\mathring{T}$.

Também, se $|\lambda|<1/2$, então $F_1: T\longrightarrow F_1(T)$ é um difeomorfismo.

Demonstração:

se $|w| \leq c$

① Seja $k = \frac{1}{c} + |\lambda| < 1$. Para $|w| \leq c$, $F_1(z,w) = (z^2, z + \lambda w)$ satisfaz: $|z + \lambda w| \leq 1 + |\lambda w| \leq 1 + c|\lambda| < c$,

mas isso implica que $F_1(T) \subset \mathring{T}$. (A gente utilizou aqui que $|w| \leq c$).

Agora: para $|w| > c$: temos $|z + \lambda w| \leq 1 + |\lambda| \cdot |w| \leq \frac{|w|}{c} + |\lambda w| = k \cdot |w|$, onde $k = \frac{1}{c} + |\lambda| < 1$.

Isso implica que depois de um grande número de iterações de F_1, qualquer ponto de $S^1 \times \mathbb{C}$ entra eventualmente no toro T (porque $|w| \mapsto k|w| \mapsto k^2|w|$ converge para 0).

② Agora $|\lambda| < \frac{1}{2}$ (e então $c = 2$): vamos mostrar que a restrição de F_1 a T é injetiva:

Sejam $(z,w) \neq (z',w')$ tal que $F_1(z,w) = F_1(z',w')$: então necessariamente $z' = -z$.

Mas, $z + \lambda w = -z + \lambda w' \Rightarrow 2z = \lambda(w' - w) \Rightarrow |\underbrace{2z}_{=2}| = |\lambda(w' - w)| < 2$, contradição.

Assim, $F_1 : T \to F_1(T)$ é bijetiva. A função inversa é C^∞: ela é dada localmente por

$(u, v) \mapsto \left(\sqrt{u}, \frac{v - \sqrt{u}}{\lambda}\right)$ onde $\sqrt{u}$ é definida localmente. $\square$

<u>Consequências da proposição:</u> a sequência $T \supset F_1(T) \supset F_1^{\circ 2}(T) \supset \dots$

é uma sequência decrescente de compactos. A intersecção $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_1^{\circ n}(T)$ é compacta, e cada órbita de F_1 converge para $S := \bigcap F_1^{\circ n}(T)$. S é chamado "solenoide".

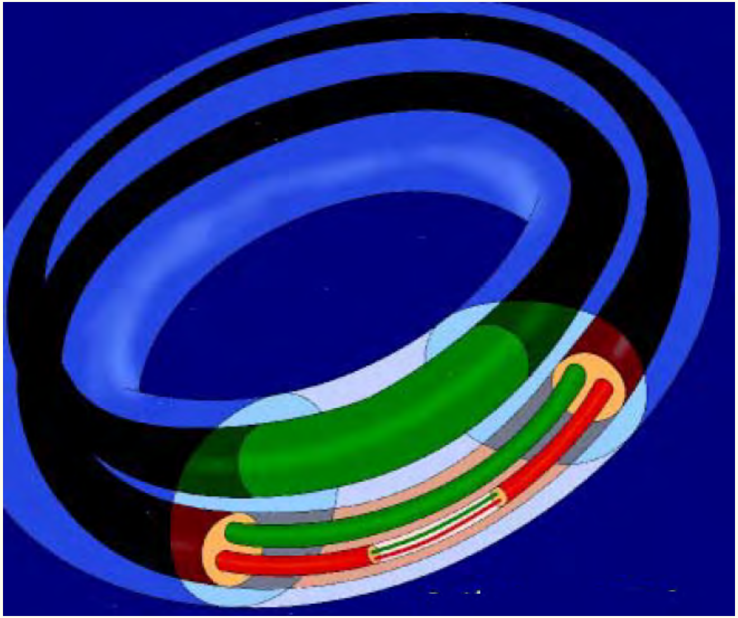
No caso $|\lambda| < 1/2$: $F_1(T)$ é um toro, dentro do toro T, fazendo 2 voltas ao redor. $F_1^{\circ 2}(T)$ é um toro dentro de T, fazendo 4 voltas ao redor, etc... $\rightarrow$ ver proxima pagina!

Proposição: Seja $\hat{S}^1$ o espaço de todas as sequências bi-infinitas $(\dots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots) \in (S^1)^{\mathbb{Z}}$ tais que $\forall n \in \mathbb{Z}, z_{n+1} = E_2(z_n)$. Seja $S = \bigcap_{n \geq 0} F_1^{\circ n}(T)$.

Então, a correspondência: $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto \left(z_0, \sum_{k\geq 1} \lambda^{k-1} z_{-k}\right)$ é uma semi-conjugação entre $(\hat{S}^1, \sigma)$ e $(A, F_1|_A)$. Se $|\lambda| < 1/2$, ela é uma conjugação (i.e um homeomorfismo entre $\hat{S}^1$ e A).

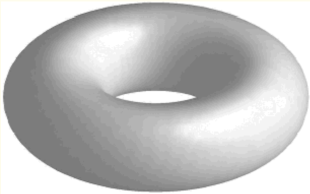
<u>Demonstração:</u> na proxima aula...

Visualização do Solenoide A:



$F_1^{\circ 3}(T) \subset F_1^{\circ 2}(T) \subset F_1(T) \subset T$

T



$F_1^{\circ 2}(T) \subset F_1(T)$

$F_1(T) \subset T$