Dicas Lista 5:

① Podemos mostrar a continuidade e a diferenciabilidade num intervalo $x \in (-N, N)$.

Lembrando que $\left|\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right| \leq M$ para um certo M e $u \in \mathbb{R}$, temos:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(tx)}{t(1+t^2)}\right| = \left|x \cdot \frac{\operatorname{sen}(tx)}{tx} \cdot \frac{1}{1+t^2}\right| \leq |x| \cdot M \cdot \frac{1}{1+t^2} \leq M \cdot N \cdot \left(1_{(0,1)}(t) + \frac{1}{t^2} 1_{[1,\infty)}(t)\right).$$

O teorema de continuidade mostra então que $G(0) = \int_{t \neq 0} 0 = 0$.

Para a diferenciabilidade:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| = \left|\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \text{ integrável.}$$

Assim $G'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\, dt$ e $G'(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi$.

Para calcular $x \cdot G'(x)$: é só observar que $\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen}(tx) = \frac{t}{x} \partial_t \operatorname{sen}(tx)$,

e depois
$$x\, G'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x \cos(tx)}{1+t^2}\, dt = \lim_n \int_{-n}^{n} \frac{x\, \partial_x \operatorname{sen}(tx)}{t(1+t^2)}\, dt = \lim_n \int_{-n}^{n} \frac{\partial_t \operatorname{sen}(tx)}{1+t^2}\, dt$$
$$= \lim_n \left.\frac{\operatorname{sen}(tx)}{1+t^2}\right)_{-n}^{n} - \lim_n \int_{-n}^{n} \operatorname{sen}(tx)\, \partial_t \frac{1}{1+t^2}\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{2t \operatorname{sen}(tx)}{(1+t^2)^2}\, dt$$

②
$$x\,\Gamma(x) = \lim_n \int_{(1/n,\, n)} e^{-t} x\, t^{x-1}\, dt = \lim_n \left(e^{-t} t^x\right)_{1/n}^{n} - \lim_n \int_{1/n}^{n} \partial_t e^{-t}\, t^x\, dt = \lim_n \int_{1/n}^{n} e^{-t} t^{(x+1)-1}\, dt$$
$$= \lim_n \int_{(1/n,\, n)} e^{-t} t^{x+1-1}\, dt$$
$$= \Gamma(x+1).$$

③ É só ver que $\left|\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3\right| \leq 1$ e que para $\alpha \in (a,b)$, temos que $\left|e^{-\alpha x}\right| \leq e^{-ax}$ (independente de α), para x grande ...

(5) Suponhamos que $\lim_n \int |f_n - f| = 0$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow \left| \int |f_n| - \int |f| \right| = \left| \int |f_n| - |f| \right| \leq \int |f_n - f| \leq \varepsilon$.

Na outra direção: $|f_n| + |f| \in L^1$, $|f_n - f|$ também (porque $|f_n - f| \leq |f_n| + |f|$), e $\begin{cases} |f_n - f| \to 0 \in L^1 \\ |f_n| + |f| \to 2|f| \in L^1 \end{cases}$

Era um exercício da lista 4...

(4) Temos que $|\min(f_n, f) - f| \leq |f_n - f| \longrightarrow 0$ q.s, então $g_n \to f$ q.s.

Mas $|\min(f_n, f)| \leq |f| = f$ integrável. Então o teor. da conv. dominada $\Rightarrow \int g_n \to \int f$.

Depois, temos $|f_n - f| = f_n + f - 2\min(f_n, f)$

$$\Rightarrow \lim_n \int |f_n - f| = \lim \int f_n + \int f - 2 \lim \int g_n = \int f + \int f - 2 \int f = 0.$$