Mat 234 Revisão PSUB

Sylvain Bonnot

Exercício 1. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e limitada. Mostre que* $\forall n \geq 1$ *, a função* $nf(t)e^{-nt}$ *é integrável em* $(0, +\infty)$ *e determine* $\lim_n \int_0^\infty nf(t)e^{-nt}dt$.

Exercício 2. *Seja* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço de medida tal que* $\mu(X) < +\infty$. *Para qualquer* f *mensurável podemos definir* $E_n := \{x \in X; (n-1) \leq |f(x)| < n\}$. *Mostre a seguinte equivalência (para* $1 \leq p < +\infty$*):*

$$f \in L^p(X) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^p \mu(E_n) < +\infty.$$

Exercício 3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $x \in [0, +\infty)$ *seja* $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{n\sqrt{x}+1}$.

a) *Mostre que para todo* n, f_n *é integrável.*

b) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *seja* $a_n := \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x)dx$. *Mostre que* $(a_n)_{n\geq 0}$ *converge e determine o limite.*

Exercício 4. *Seja* μ *uma medida em* $\mathbb{R}$ *tal que* $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. *Seja* $f(x) = \mu((-\infty, x])$. *Mostre:*

$$\int [f(x+c) - f(x)]dx = c\mu(\mathbb{R}).$$

Exercício 5. *Seja* $(E, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço de medida.*

(a) *Mostre que* $\forall a > 0$, *temos* $a.\mu(\{|f| > a\}) \leq \int_{|f|>a} |f| d\mu$.

(b) *Mostre que* $\forall a > 0$, *temos* $\mu(\{|f| > a\}) \leq \frac{1}{a} \int |f| d\mu$.

(c) *Mostre que* $\lim_{a\to+\infty} a.\mu(\{|f| > a\}) = 0$.