① Suponhamos $|f(x)| \leq M \ \forall x$. A funsão $t \mapsto n f(t) e^{-nt}$ é contínua então mensurável.

$$\int_0^\infty |nf(t)e^{-nt}|dt \leq nM \int e^{-nt} dt = M < +\infty \Rightarrow \text{é integrável.}$$

Mudansa de variáveis $s = nt$: $\int n f(t) e^{-nt} dt = \int_0^\infty f\left(\frac{s}{n}\right) e^{-s} ds$.

Temos: $f\left(\frac{s}{n}\right) e^{-s} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$ e $\left|f\left(\frac{s}{n}\right)e^{-s}\right| \leq M e^{-s}$ integrável.

Então (conv. dominada): $\int n f(t) e^{-nt} dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$.

② Temos: $\int |f|^p d\mu = \sum_n \int_{E_n} |f|^p \leq \sum_n n^p \mu(E_n)$ numa diresão

Na outra: $\int |f|^p \geq \sum_n \mu(E_n)(n-1)^p$, mas $\frac{n^p}{(n-1)^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ então $\sum_n \mu(E_n)(n-1)^p$ converge se e somente se $\sum_n n^p \mu(E_n)$ converge.

③ ⓐ $|f_n(x)| \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ integrável em $[0,+\infty)$.

ⓑ limite pontual é $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ e de ⓐ temos uma dominasão $\Rightarrow a_n \to \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$.

④ Se $g(x,c) := 1_{(x,x+c]}(x,c)$

$$\text{Tonelli} \Rightarrow \int \underbrace{\underbrace{\int g \, d\mu}_{=\mu(x,x+c]}}_{=\int F(x+c)-F(x)\,dx} dx = \int \underbrace{\int g \, dx}_{=c} \, d\mu = c\,\mu(\mathbb{R})$$

⑤ a) b): $\int |f| \geq \int_{|f|>a} |f| \geq a \cdot \mu(|f|>a)$. Aqui f é integrável.

ⓒ

Seja $a_n \to \infty$ e $g_n := |f| \cdot 1_{\{|f|>a_n\}}$. Temos $g_n \to 0$ q.s e $|g_n| \leq |f|$ q.t.p.

Concl: $\int g_n \to 0$ (conv. dom.) e $a_n \mu(|f|>a_n) \longrightarrow 0$.