14. Suponha que a região A do plano, situada no semiplano $y \geqslant 0$, possa ser dividida em duas partes A_1 e A_2 às quais se aplica, em relação ao eixo x, o teorema de Papus. Suponha, ainda, que a área de A seja igual à soma das áreas de A_1 e A_2 e $V_x = V_{1x} + V_{2x}$ onde V_{1x}, V_{2x} e V_x são os volumes respectivos dos sólidos obtidos, pela rotação em torno do eixo x, de A_1, A_2 e A. Mostre que, em relação ao eixo x, o teorema de Papus aplica-se, também, a A. (Estabeleça resultado análogo em relação ao eixo y, supondo A situada no semiplano $x \geqslant 0$.)

15. Sejam $A_1 = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$, $A_2 = \{(x, y) \mid 2 \leqslant x \leqslant 4, 2 \leqslant y \leqslant 3\}$ e A a reunião de A_1 e A_2. Determine o centro de massa de A.

16. Determine o centro de massa do conjunto $-1 \leqslant x \leqslant 3$ e $0 \leqslant y \leqslant (x+1)^2$. (*Sugestão*: Resolva o problema no plano (u, y), com $u = x + 1$.)

17. Utilizando o Exercício 9, estabeleça, para gráfico de função, resultado análogo ao do Exercício 10.

14

Equações Diferenciais de 1.ª Ordem de Variáveis Separáveis e Lineares

14.1. Equações Diferenciais: Alguns Exemplos

As soluções de muitos problemas que ocorrem tanto na física como na geometria dependem de resoluções de *equações diferenciais*. Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO 1. Uma partícula desloca-se sobre o eixo x de modo que, em cada instante t, a velocidade é o dobro da posição. Qual a *equação diferencial* que rege o movimento?

Solução

Neste problema, o que nos interessa determinar é a função de posição $x = x(t)$. De acordo com o enunciado do problema, o movimento é regido pela *equação diferencial de 1.ª ordem*

$$\frac{dx}{dt} = 2x.$$

Conforme o Exercício 2 da Seção 10.1, as funções que satisfazem tal equação são da forma $x = ke^{2t}$, k constante. Assim, a função de posição do movimento é da forma $x = ke^{2t}$. ■

EXEMPLO 2. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo x sob a ação de uma única força, paralela ao deslocamento, com componente $f(x) = -x$. Qual a *equação diferencial* que rege o movimento?

Solução

Pela lei de Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f(x).$$

Assim, o movimento é regido pela *equação diferencial de 2.ª ordem*

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0.$$

Uma *solução* desta equação é uma função que é igual à oposta de sua derivada segunda. Por exemplo, $(\text{sen } t)''=-\text{sen } t$, assim $x=\text{sen } t$ é uma solução da equação. Veja, sendo $x=\text{sen } t$, para todo t,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=(\text{sen } t)''+\text{sen } t=0.$$

A função $x=\cos t$ é também solução (verifique). Veremos posteriormente que as funções que a satisfazem são da forma $x=A\cos t+B\text{ sen } t$, com A e B constantes. ■

EXEMPLO 3. Determine uma função $y=f(x)$ que satisfaça a propriedade: o coeficiente angular da reta tangente no ponto de abscissa x é igual ao produto das coordenadas do ponto de tangência.

Solução

Se f é uma tal função, para todo x no seu domínio

$$f'(x)=xf(x).$$

Assim, a função $y=f(x)$ procurada é *solução da equação diferencial de 1.ª ordem*

$$\frac{dy}{dx}=xy.$$

Veremos mais adiante como determinar as funções que satisfazem tal equação. ■

14.2. Equações Diferenciais de 1.ª Ordem de Variáveis Separáveis

Por uma *equação diferencial de 1.ª ordem de variáveis separáveis* entendemos uma equação da forma

$$①\qquad \frac{dx}{dt}=g(t)\,h(x)$$

onde g e h são funções definidas em intervalos abertos I_1 e I_2, respectivamente.

Uma *solução* de ① é uma função $x=x(t)$ definida num intervalo aberto I, $I\subset I_1$, tal que, para todo t em I,

$$x'(t)=g(t)\,h(x(t)).$$

EXEMPLO 1. $\frac{dx}{dt}=tx^2$ é uma equação diferencial de 1.ª ordem de variáveis separáveis. Aqui $g(t)=t$ e $h(x)=x^2$. ■

EXEMPLO 2. $\frac{dx}{dt}=t^2+x^2$ é uma equação diferencial de 1.ª ordem, mas não de variáveis separáveis. ■

EXEMPLO 3. Verifique que $x(t)=\frac{-2}{t^2-1}$, $-1<t<1$, é solução da equação $\frac{dx}{dt}=tx^2$.

Solução

Precisamos mostrar que, para todo t em $]-1, 1[$,

$$x'(t)=t\,[x(t)]^2.$$

Temos

$$x'(t)=\left(-\frac{2}{t^2-1}\right)'=\frac{4t}{(t^2-1)^2}$$

e

$$t\,[x(t)]^2=t\cdot\left[\frac{-2}{t^2-1}\right]^2=\frac{4t}{(t^2-1)^2}.$$

Logo, para todo t em $]-1, 1[$,

$$x'(t)=t\,[x(t)]^2$$

ou seja, $x(t)=\frac{-2}{t^2-1}$, $-1<t<1$, é solução da equação. ■

Na equação ①, x está sendo olhado como variável dependente e t como variável independente. A equação ① pode também ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx}=g(x)\,h(y)$$

onde, agora, y é a variável dependente e x a independente.

Exercícios 14.2

1. Assinale as equações diferenciais de variáveis separáveis.

a) $\frac{dx}{dt} = tx$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $x > 0$

c) $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$

d) $\frac{dx}{dt} = x + t$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x^2 + 1}$

f) $\frac{dx}{dt} = x(1 + t^2)$

2. Verifique que a função dada é solução da equação dada.

a) $x(t) = \text{tg } t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, e $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$

b) $y(x) = \frac{-2}{x^2 + 1}$ e $\frac{dy}{dx} = xy^2$

c) $x(t) = 4$ e $\frac{dx}{dt} = t(x^2 - 16)$

d) $x(t) = 1$, $t > 0$, e $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - 1}{t}$, $t > 0$

e) $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ e $\frac{dy}{dx} = xy$

3. Determine as funções constantes, caso existam, que sejam soluções da equação dada.

a) $\frac{dx}{dt} = 1 - x^2$

b) $\frac{dx}{dt} = tx^2$

c) $\frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy + 1$

d) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

e) $\frac{dx}{dt} = t(x - 1)$

f) $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$, $t > 0$

14.3. Soluções Constantes

Consideremos a equação de variáveis separáveis

① $$\frac{dx}{dt} = g(t)\,h(x)$$

com g e h definidas em intervalos abertos I_1 e I_2, respectivamente, e *g não identicamente nula* em I_1.

Consideremos a função constante

② $$x(t) = a, \ t \in I_1.$$

Se $h(a) = 0$, então $x(t) = a$, $t \in I_1$, será solução de ① (por quê?). Reciprocamente, se ② for solução de ①, devemos ter para todo t em I_1

$$0 = g(t)\,h(a)$$

e como $g(t)$ não é identicamente nula em I_1, resulta $h(a) = 0$. Assim,

> $x(t) = a$, $t \in I_1$ (a constante) é solução de ① se, e somente se, a for raiz da equação $h(x) = 0$.

EXEMPLO 1. Determine as soluções constantes de $\frac{dx}{dt} = t(1 - x^2)$.

Solução

$h(x) = 1 - x^2$; $h(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0$. Como

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

resulta que

$$x(t) = 1 \text{ e } x(t) = -1$$

são as soluções constantes da equação. ■

EXEMPLO 2. A equação $\frac{dx}{dt} = 4 + x^2$ não admite solução constante, pois $h(x) = 4 + x^2$ não admite raiz real. ■

Exercícios 14.3

Determine, caso existam, as soluções constantes.

1. $\frac{dx}{dt} = tx^2$

2. $\frac{dx}{dt} = x^2 - x$

3. $\frac{dx}{dt} = t(1 + x^2)$

4. $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}$

5. $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 - 1}{x}$

6. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - 1}{t}$, $t < 0$

14.4. Soluções Não-constantes

O teorema que enunciamos a seguir e cuja demonstração é deixada para o Apêndice 4 nos será útil na determinação das soluções não-constantes.

> ***Teorema.*** Seja a equação
>
> ① $$\frac{dx}{dt} = g(t)\,h(x)$$
>
> onde g e h são definidas em intervalos abertos I_1 e I_2, respectivamente, com g *contínua* em I_1 e h' *contínua* em I_2. Nestas condições, se $x = x(t)$, $t \in I$, for solução *não-constante* de ①, então, para todo t em I, $h(x(t)) \neq 0$.

Vejamos, então, como determinar as *soluções não-constantes* de ①, supondo que g e h satisfaçam as condições do teorema anterior.

Suponhamos que $x = x(t)$, $t \in I$, seja uma solução não-constante de ①; assim, para todo t em I,

$$x'(t) = g(t)\,h(x(t))$$

ou

② $$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t).$$

Seja $J = \{x(t) \mid t \in I\}$; J é um intervalo, pois $x = x(t)$ é contínua. Observe que para todo x em J, $h(x) \neq 0$. A função $\frac{1}{h(x)}$ sendo contínua em J admite uma primitiva $H(x)$, neste intervalo: $H'(x) = \frac{1}{h(x)}$, $x \in J$. Segue que, para todo t em I,

③ $$[H(x(t))]' = \frac{x'(t)}{h(x(t))}.$$

Resulta de ② e ③ que, para todo t em I,

④ $$[H(x(t))]' = g(t).$$

Sendo $G(t)$ uma primitiva de g em I, segue de ① que existe uma constante k tal que, para todo t em I,

⑤ $$H(x(t)) = G(t) + k.$$

Como $h(x) \neq 0$ em J e pelo fato de h ser contínua, segue que $\frac{1}{h(x)}$ mantém o mesmo sinal em J, logo, H é estritamente crescente ou estritamente decrescente em J e, portanto, inversível. Sendo $\mathcal{H}$ a função inversa de H em J, resulta de ⑤ que

$$x(t) = \mathcal{H}(G(t) + k),\ t \in I.$$

Por outro lado, deixamos a seu cargo verificar que toda função do tipo

$$x(t) = \mathcal{H}(G(t) + k)$$

é solução de ①, onde $\mathcal{H}$ é a inversa de uma primitiva de $\frac{1}{h(x)}$ num intervalo em que $h(x) \neq 0$, $G(t)$ uma primitiva de $g(t)$ num intervalo $I \subset I_1$ e k uma constante.

14.5. Método Prático para Determinar as Soluções Não-Constantes

Seja a equação

① $$\frac{dx}{dt} = g(t)\,h(x)$$

com g e h nas condições do teorema da seção anterior. O quadro que apresentamos a seguir fornece-nos um roteiro prático para determinar as soluções não-constantes de ①.

> $$\frac{dx}{dt} = g(t)\,h(x)$$
>
> $$\frac{dx}{h(x)} = g(t)\,dt \text{ (separação das variáveis)}$$
>
> $$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)\,dt$$
>
> $$H(x) = G(t) + k$$

EXEMPLO 1. Resolva a equação

$$\frac{dx}{dt} = x^2 t$$

Solução

Inicialmente, vamos determinar as soluções constantes.

$$h(x) = x^2;\ x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Assim, $x(t) = 0$ é a única solução constante.

Vamos, agora, determinar as soluções não-constantes.

$$\frac{dx}{dt} = x^2 t$$

$$\frac{dx}{x^2} = t\,dt$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int t\,dt$$

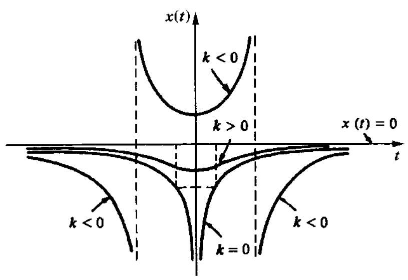
$$-\frac{1}{x} = \frac{t^2}{2} + k$$

$$x = \frac{-2}{t^2 + 2k}.$$

Como $g(t) = t$ e $h'(x) = 2x$ são contínuas resulta

$$\boxed{\begin{array}{l} \qquad x(t) = 0 \\ \text{e} \\ \qquad x(t) = \dfrac{-2}{t^2 + 2k} \ (k \text{ constante}) \end{array}}$$

é a família das soluções da equação.



■

EXEMPLO 2. Com relação à equação do exemplo anterior, determine a solução que satisfaça a *condição inicial* dada.

a) $x(1) = 0$ *b*) $x(0) = 1$ *c*) $x(0) = -1$

Solução

a) A solução constante $x(t) = 0$ satisfaz a condição inicial $x(1) = 0$.

b) $x(t) = \dfrac{-2}{t^2 + 2k}$ e $x(0) = 1$.

Assim,

$$1 = \frac{-2}{0^2 + 2k} \qquad \text{ou} \qquad k = -1.$$

Segue que

$$x(t) = \frac{-2}{t^2 - 2}, -\sqrt{2} < t < \sqrt{2},$$

satisfaz a condição inicial dada. (Lembre-se: o domínio de uma solução é sempre um intervalo; no caso em questão, tomamos $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$, pois o domínio deve conter $t = 0$.)

c) $x(t) = \dfrac{-2}{t^2 + 2k}$ e $x(0) = -1$.

$$-1 = \frac{-2}{0^2 + 2k} \quad \text{ou } k = 1.$$

Segue que

$$x(t) = \frac{-2}{t^2 + 2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

satisfaz a condição inicial dada. ■

EXEMPLO 3. Resolva $\dfrac{dx}{dt} = xt^2$.

Solução

$x(t) = 0$ é a única solução constante.

Determinemos, agora, as soluções não-constantes.

$$\frac{dx}{x} = t^2\, dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int t^2\, dt$$

$$\ln |x| = \frac{t^3}{3} + k_1$$

daí

$$|x| = e^{k_1}\, e^{\frac{t^3}{3}}$$

ou

$$|x| = k_2\, e^{\frac{t^3}{3}},\ k_2 > 0\ (k_2 = e^{k_1}).$$

Se $x > 0$, $x = k_2\, e^{\frac{t^3}{3}}$ e se $x < 0$, $x = -k_2\, e^{\frac{t^3}{3}}$, segue que $x = k\, e^{\frac{t^3}{3}}$, $k \neq 0$ real qualquer. Para $k = 0$, temos a solução constante $x(t) = 0$. Assim

$$x(t) = k\, e^{\frac{t^3}{3}},\ k \text{ real},$$

é a família das soluções da equação. ■

EXEMPLO 4. Determine a função $y = f(x)$ tal que $f(1) = 1$ e que goza da propriedade: o coeficiente angular da reta tangente no ponto de abscissa x é igual ao produto das coordenadas do ponto de tangência.

Solução

Para todo x no domínio de f devemos ter

$$f'(x) = x f(x).$$

Assim, a função procurada é solução da equação

$$\frac{dy}{dx} = xy.$$

Temos

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \, dx$$

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + k$$

Para $k = -\frac{1}{2}$, a condição $y = 1$ para $x = 1$ estará satisfeita. Assim, a função procurada é

$$y = e^{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{x^2/2}. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 5. Determine o tempo necessário para se esvaziar um tanque cilíndrico de raio 2 m e altura 5 m, cheio de água, admitindo que a água se escoe através de um orifício, situado na base do tanque, de raio 0,1 m, com uma velocidade $v = \sqrt{2gh}$ m/s, sendo h a altura da água no tanque e $g = 10$ m/s^2 a aceleração gravitacional.

Solução

Seja $h = h(t)$ a altura da água no instante t. O volume $V = V(t)$ de água no tanque no instante t será

$$V(t) = 4\pi h(t)$$

e assim

① $$\frac{dV}{dt} = 4\pi \frac{dh}{dt}.$$

Por outro lado, supondo Δt suficientemente pequeno, o volume de água que passa pelo orifício entre os instantes t e $t + \Delta t$ é aproximadamente igual ao volume de um cilindro de base πr^2 (r raio do orifício) e altura $v(t)\,\Delta t$ (observe que a água que no instante t está saindo

pelo orifício, no instante $t + \Delta t$ se encontrará, aproximadamente, a uma distância $v(t)\,\Delta t$ do orifício, onde $v(t)$ é a velocidade, no instante t, com que a água está deixando o tanque). Então, na variação de tempo Δt, a variação ΔV no volume de água será

$$\Delta V \cong -v(t)\,\pi r^2\,\Delta t.$$

É razoável, então, admitir que a diferencial de $V = V(t)$ seja dada por

$$dV = -v(t)\,\pi r^2\,dt$$

ou que

② $$\frac{dV}{dt} = -v(t)\,\pi r^2.$$

De ① e ② resulta

$$4\pi \frac{dh}{dt} = -v(t)\,\pi r^2.$$

Sendo $v = \sqrt{20h}$ e $r = 0{,}1$, resulta que a altura $h = h(t)$ da água no tanque é regida pela equação

$$4 \frac{dh}{dt} = -0{,}01\sqrt{20h}, \; h > 0.$$

Temos

$$\int \frac{400}{\sqrt{20h}} \, dh = -\int dt$$

$$\frac{800}{\sqrt{20}} \sqrt{h} = -t + k.$$

De $h(0) = 5$, resulta $k = 400$. Assim

$$h = \frac{5}{400^2}(-t + 400)^2.$$

O tempo necessário para esvaziar o tanque será então de 400 segundos ou 6 min 40 s. $\blacksquare$

EXEMPLO 6. Uma partícula move-se sobre o eixo x com aceleração proporcional ao quadrado da velocidade. Sabe-se que no instante $t = 0$ a velocidade é de 2 m/s e, no instante $t = 1$, 1 m/s.

a) Determine $v = v(t)$, $t \geq 0$.
b) Determine a função de posição supondo $x(0) = 0$.

Solução

a) O movimento é regido pela equação

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v^2$$

onde α é a constante de proporcionalidade.

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \alpha \, dt$$

$$-\frac{1}{v} = \alpha t + k$$

ou

$$v = \frac{-1}{\alpha t + k}.$$

Para $t = 0$, $v = 2$, assim

$$2 = \frac{-1}{k} \text{ ou } k = -\frac{1}{2}.$$

Para $t = 1$, $v = 1$, assim

$$1 = \frac{-1}{\alpha - \frac{1}{2}} \text{ ou } \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$v(t) = \frac{2}{1 + t}, \; t \geqslant 0.$$

b) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1 + t}$, $t \geqslant 0$.

$$\int dx = \int \frac{2}{1 + t} \, dt$$

$$x = 2 \ln(1 + t) + k.$$

Tomando-se $k = 0$, a condição inicial $x(0) = 0$ estará satisfeita. Assim,

$$x(t) = 2 \ln(1 + t). \quad ■$$

Exercícios 14.5

1. Resolva

a) $\dfrac{dx}{dt} = xt$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = y^2$

c) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 1$ *d*) $\dfrac{dT}{dt} = -2(T - 10)$

e) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{x}$, $x > 0$ *f*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$, $x > 0$

g) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1$ *h*) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y}$

i) $\dfrac{dv}{dt} = v^2 - v$ *j*) $\dfrac{dx}{dt} = \ln t$

l) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y^2}{x}$, $x > 0$ *m*) $\dfrac{ds}{dt} = te^{-s}$

n) $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{v}{u^2}$, $u > 0$ *o*) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{tx}{1 + t^2}$

p) $\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 y$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ *q*) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{\cos x}$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

r) $\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 y$, $\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{3\pi}{2}$ *s*) $\dfrac{dv}{dt} = 4 - v^2$

t) $\dfrac{dW}{dV} = \dfrac{C}{V}$ (C constante) *u*) $\dfrac{dx}{dt} = \alpha x(x + 2)$ (α constante)

2. Determine $y = y(x)$ que satisfaça as condições dadas.

a) $\dfrac{dy}{dx} = e^y$ e $y(0) = 1$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$ e $y(1) = 2$

c) $\dfrac{dy}{dx} = 3y^2$ e $y(0) = \dfrac{1}{2}$ *d*) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$ e $y(0) = 1$

3. Suponha que $V = V(p)$, $p > 0$, satisfaça a equação $\dfrac{dV}{dp} = -\dfrac{V}{\gamma p}$ (γ constante). Admitindo que $V = V_1$, $V_1 > 0$, para $p = p_1$, mostre que $V^\gamma p = V_1{}^\gamma p_1$, para todo $p > 0$.

4. O coeficiente angular da reta tangente, no ponto de abscissa x, ao gráfico de $y = f(x)$, é proporcional ao cubo da ordenada do ponto de tangência. Sabendo que $f(0) = 1$ e $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, determine f.

5. Um corpo de massa 10 kg é abandonado a uma certa altura. Sabe-se que as únicas forças atuando sobre ele são o seu peso e uma força de resistência proporcional à velocidade. Admitindo-se que 1 segundo após ter sido abandonado a sua velocidade é de 8 m/s, determine a velocidade no instante t (suponha a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2).

6. A reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$, no ponto (x, y), intercepta o eixo y no ponto de ordenada xy. Determine f sabendo que $f(1) = 1$.

7. Determine a curva que passa por $(1, 2)$ e cuja reta tangente em (x, y) intercepta o eixo x no ponto de abscissa $\dfrac{x}{2}$.

8. Um corpo de massa 70 kg cai do repouso e as únicas forças atuando sobre ele são o seu peso e uma força de resistência proporcional ao quadrado da velocidade. Admitindo-se que 1 segundo após o início da queda a sua velocidade é de 8 m/s, determine a velocidade no instante t. (Suponha a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2.)

9. Para todo $a > 0$, o gráfico de $y = f(x)$ intercepta ortogonalmente a curva $x^2 + 2y^2 = a$. Determine f sabendo que $f(1) = 2$.
10. Para todo $a > 0$, o gráfico de $y = f(x)$ intercepta ortogonalmente a curva $xy = a$, $x > 0$. Determine f supondo $f(2) = 3$.
11. Determine uma curva que passa pelo ponto $(0, 2)$ e que goza da propriedade: a reta tangente no ponto (x, y) encontra o eixo x no ponto A, de abscissa > 0, de tal modo que a distância de (x, y) a A é sempre 2.
12. Verifique que a mudança de variável $u = \frac{y}{x}$ transforma a equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y}$ na de variáveis separáveis $\frac{du}{dx} = -\frac{u^2}{(1 + u)\,x}$. Determine, então, soluções (na forma implícita) da equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y}$.
13. Determine soluções da equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x}{x}$. (*Sugestão*: Olhe para o Exercício 12.)
14. Verifique que a mudança de variável $u = y - x$ transforma a equação $\frac{dy}{dx} = (y - x)^2$ na de variáveis separáveis $\frac{du}{dx} = u^2 - 1$. Determine, então, soluções da primeira equação.

14.6. Equações Diferenciais Lineares de 1.ª Ordem

Por uma *equação diferencial linear de 1.ª ordem* entendemos uma equação do tipo

$$\text{①} \qquad \frac{dx}{dt} = x\,g(t) + f(t)$$

onde g e f são funções dadas, contínuas e definidas num mesmo intervalo I.

EXEMPLO 1. $\frac{dx}{dt} = xt + 1$ é linear de 1.ª ordem; aqui $g(t) = t$ e $f(t) = 1$. ■

EXEMPLO 2. $\frac{dx}{dt} = xt^2$ é linear de 1.ª ordem (é também de variáveis separáveis); aqui $g(t) = t^2$ e $f(t) = 0$. ■

EXEMPLO 3. $\frac{dx}{dt} = 5x^2 + \operatorname{sen} t$ *não* é linear (também não é de variáveis separáveis).

Observe que na equação linear, tanto a *variável dependente como sua derivada ocorrem com grau* 1.

Se $f(t) = 0$ em I, a equação ① é de variáveis separáveis e a solução geral será

$$x = ke^{G(t)} \ (k \in \mathbb{R})$$

onde G é uma primitiva de g em I. Por simplicidade, escreveremos

$$x = ke^{\int g(t)\,dt} (k \in \mathbb{R})$$

onde $\int g(t)\,dt$ estará representando, então, uma *particular* primitiva de g. ■

EXEMPLO 4. Resolva a equação $\frac{dx}{dt} = xt^2$.

Solução

Trata-se de uma equação de 1.ª ordem, linear e de variáveis separáveis. A solução geral é

$$x = ke^{\int t^2\,dt} \quad (k \in \mathbb{R})$$

ou

$$x = ke^{\frac{t^3}{3}}.$$

Vamos, agora, *resolver* ① no caso em que $f(t)$ não é identicamente nula em I. Observamos, inicialmente, que

$$\frac{d}{dt}[xe^{-\int g(t)\,dt}] = \frac{dx}{dt}e^{-\int g(t)\,dt} - x\,g(t)\,e^{-\int g(t)\,dt} =$$

$$= \left[\frac{dx}{dt} - x\,g(t)\right]e^{-\int g(t)\,dt}.$$

Isto é,

$$\frac{d}{dt}[xe^{-\int g(t)\,dt}] = \left[\frac{dx}{dt} - x\,g(t)\right]e^{-\int g(t)\,dt}.$$

A igualdade acima nos indica um caminho para obtermos a solução geral de ① no caso em que $f(t)$ não é identicamente nula em I. Temos que ① é equivalente a

$$\frac{dx}{dt} - x\,g(t) = f(t).$$

Multiplicando os dois membros pelo *fator integrante* $e^{-\int g(t)\,dt}$, obtemos

$$\left[\frac{dx}{dt} - x\,g(t)\right]e^{-\int g(t)\,dt} = f(t)\,e^{-\int g(t)\,dt}$$

ou

$$\frac{d}{dt}[xe^{-\int g(t)\,dt}] = f(t)\,e^{-\int g(t)\,dt}.$$

Daí

$$\frac{d}{dt}[xe^{-\int g(t)\,dt}] = f(t)\,e^{-\int g(t)\,dt}.$$