

O teorema de Otal (Morgan-Shalen...)

Resumo : Conteúdo do teorema :

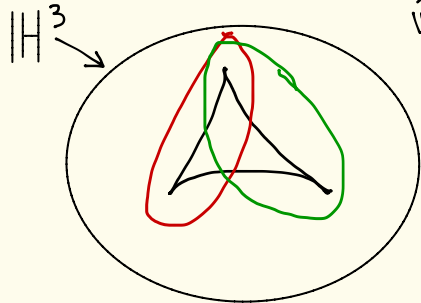
Seja (ρ_i) uma sequência de representações discretas, injetivas de G em $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$: então uma das duas possibilidades seguintes vai acontecer, depois de tomar uma subsequência :

1) $\rho_n \xrightarrow{\text{alg.}} \rho_\infty$ (pode ser depois de uma conjugação) ;

ou 2) \exists uma "representação $\rho: G \rightarrow \text{Isom}(T)$ " onde T é uma "R-arvore"
tal que " $\rho_n \rightarrow \rho$ ".

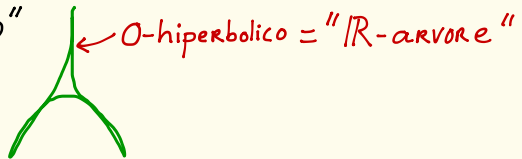
No caso 2 : "o espaço \mathbb{H}^3 degenerou em uma arvore" (??)

Ideia : em \mathbb{H}^3 (ou \mathbb{H}^2), \exists constante universal δ tal que :



"a δ -vizinhança de 2 arestas de um triângulo geodésico τ contém a terceira aresta" \equiv espaço é δ -hiperbólico (no sentido de GROMOV)

Agora : "degeneração $\delta \rightarrow 0$ "

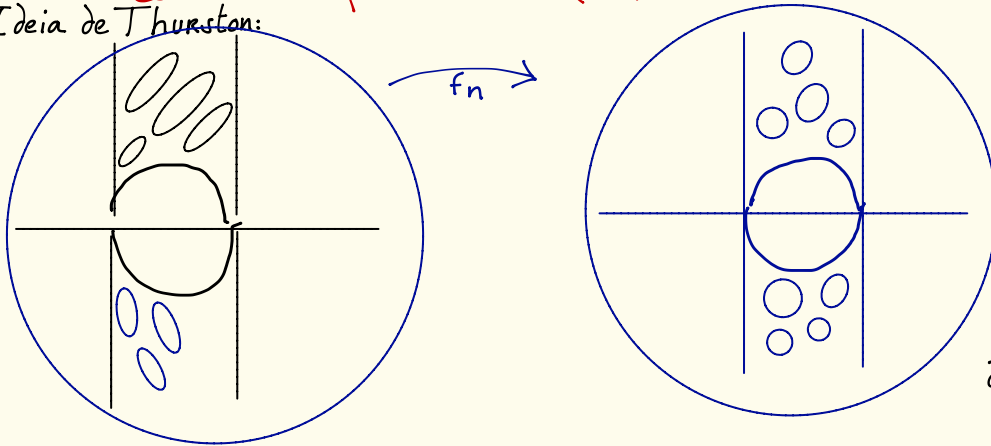


Quando e como a gente vai utilizar este teorema?

Lembra: Objetivo ultimo = construir $\rho: G \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$, onde $G = \langle G_1, t \rangle$, tal que $t \gamma t^{-1} = \varphi(\gamma) \forall \gamma \in G_1$. Aqui, obter $\rho: G_1 \rightarrow \text{Isom} \mathbb{H}^3$ é OK.

Como obter: $\rho: \langle t \rangle \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$?

Ideia de Thurston:



vai criar: sequência
 $f_n \circ \rho \circ f_n^{-1} \xrightarrow{?} \rho_\infty$?

Dem. por contradição

a gente vai mostrar
que a sequência não pode
degenerar...

e depois?

① mostrar que \exists homeomorfismo Ψ_∞ quaseconforme tal que:

$$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}, \forall \gamma \in G_1, \Psi_\infty(\rho_\infty(\gamma)(z)) = \rho_\infty(\varphi(\gamma))(\Psi_\infty(z))$$

② mostrar Ψ_∞ é Möbius $\Leftrightarrow \mathcal{N}(\Psi_\infty) = 0$ (teorema de Sullivan).

\mathbb{R} -árvores e isometrias delas

Def. 1:

Uma \mathbb{R} -árvore é um espaço métrico T tal que:

$\forall x, y \in T$, a interseção de todos os conjuntos conexos que contêm x e y (denotada $[x, y]$) é isométrica à o intervalo $[0, d(x, y)]$.

Espaços métricos (X, d) :

Um **arco entre x e y** é a imagem $\alpha([a, b])$ de um segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}$ por uma aplicação $\alpha: [a, b] \rightarrow X$ que é um homeomorfismo de $[a, b]$ até $\alpha([a, b])$. (isto é: α é "mergulho topológico")

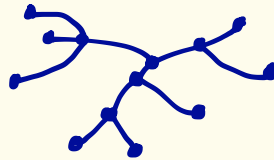
Um **segmento geodésico de x até y** é a imagem $\alpha([a, b])$ onde α é um mergulho top. que é isométrico, e também $\alpha(a) = x$ e $\alpha(b) = y$.

Def. 2:

(X, d) é uma \mathbb{R} -árvore $\iff \forall x, y \in X$ existe um único arco de x até y e este arco $[x, y]$ é um segmento geodésico.

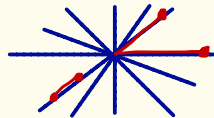
Exemplos de \mathbb{R} -árvores:

* grafo conexo sem circulas:



(so escolher um comprimento para cada aresta)

* a metrica "SNCF"

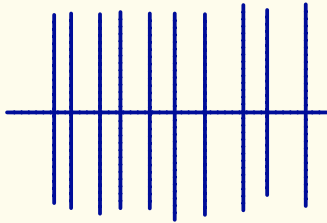


\mathbb{R}^2

* mais complicado:

$$x = (x_1, x_2)$$

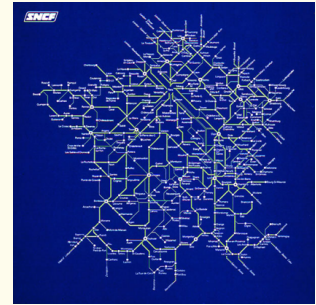
$$y = (y_1, y_2)$$



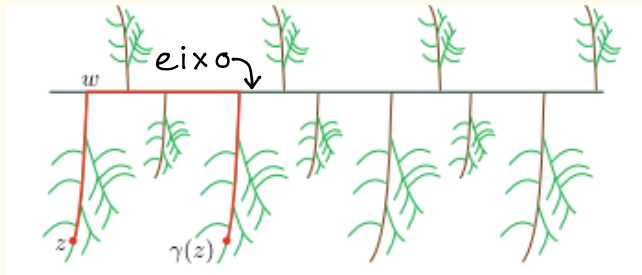
\mathbb{R}^2 , com $d(x, y) =$

a) $|x_2 - y_2|$ (se x, y na mesma vertical)

b) $|x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|$ (se não).



Isometrias: $\gamma: T \rightarrow T$ tal que $d(\gamma(x), \gamma(y)) = d(x, y) \forall x, y$ em T .



aqui o segmento vermelho é $[z, \gamma(z)]$

Obs.: a reta horizontal é γ -invariante, é isométrica á \mathbb{R} , e a restrição de γ nessa reta é uma translação

Def: γ deste tipo é chamada hiperbólica.

Classificação das isometrias de arvores:

Teorema de classificação:

Seja T uma \mathbb{R} -arvore, e $\gamma: T \rightarrow T$ uma isometria.

Então: ① γ tem um ponto fixo

ou ② γ tem um eixo, necessariamente unico, feito de todos os pontos $x \in T$ tais que $d(x, \gamma(x))$ é minimal.

Dem.

Seja $x \in T$: então $[x, \gamma(x)]$ e $[\gamma(x), \gamma^2(x)]$ têm o mesmo comprimento $= L$.

Caso 1: $L=0$, então temos um ponto fixo, x .

Caso 2: $L>0$, e o segmento $[x, \gamma(x)]$ é isométrico à $[0, L]$

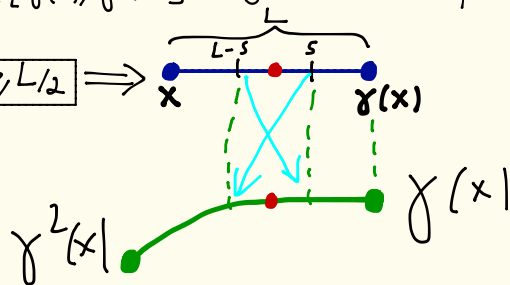
Caso a): $[x, \gamma(x)] \cap [\gamma(x), \gamma^2(x)] = \{\gamma(x)\}$

então $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n([x, \gamma(x)])$ é um eixo. (isto é, isométrico à \mathbb{R} , e a restrição de γ nesse eixo é uma translação)

Caso b): $[x, \gamma(x)] \cap [\gamma(x), \gamma^2(x)] =$ segmento de comprimento s , com $0 < s \leq L$.

Caso i):

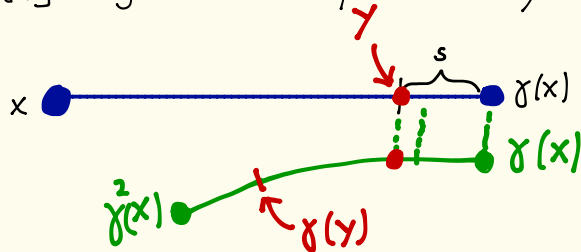
$$s > L/2 \Rightarrow$$



É fácil ver que o segmento $[L-s, s]$ é invariante \Rightarrow o centro $L/2$ é fixo.

Caso (b): $[x, \gamma(x)] \cap [\gamma(x), \gamma^2(x)] = \text{segmento de comprimento } s, 0 < s \leq L.$

Caso (ii): $s < L/2$



Lema:

$$[\gamma, \gamma(\gamma)] \cap [\gamma(\gamma), \gamma^2(\gamma)] = \{\gamma(\gamma)\}$$

Dem. do lema:

Se não, tem um outro ponto $z = \gamma(t) \in [\gamma(\gamma), \gamma^2(\gamma)] \cap [\gamma, \gamma(\gamma)]$,
com $t \in [x, \gamma(x)]$ (porque $\gamma(t) \in [\gamma, \gamma(\gamma)] \subset [\gamma(x), \gamma^2(x)]$)

mas t não pode ser à direita de γ , e não pode ser a esquerda.

Conseq. do lema: $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n([y, \gamma(y)])$ é um eixo.

Dem. da prop. "o eixo é unico":



Seja A_γ um eixo, $z \in T$: se $z \in A_\gamma$, $d(z, \gamma(z)) = L$.

Se não, seja $w \in A_\gamma$ com $[z, w]$ minimal.

$$\text{Então } [z, \gamma(z)] = [z, w] \cup [w, \gamma(w)] \cup \gamma([z, w])$$

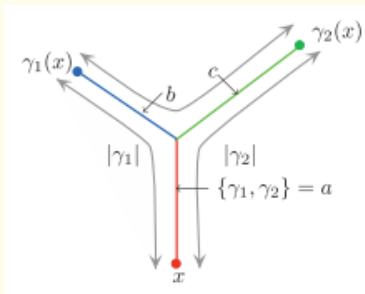
$$\Rightarrow d(\gamma(z), z) = L + 2d(z, w) > L.$$

Caracterização de Chiswell das \mathbb{R} -árvores:

Def: Γ -árvore: (Γ um grupo):

é uma \mathbb{R} -árvore com uma ação de grupo $\Gamma \times T \rightarrow T$ por isometrias.

Def: função $\{ \cdot, \cdot \}: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ de Gromov:



Seja $x \in T$ um ponto básico, vamos definir:
norma $|\cdot|: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ por $|g| = d(x, \gamma(x))$

e depois: $\{\gamma_1, \gamma_2\} := \frac{1}{2} (|\gamma_1| + |\gamma_2| - |\gamma_1^{-1}\gamma_2|)$

"a maior distância comum para $[x, \gamma_1(x)]$ e $[x, \gamma_2(x)]$!"

Def: função de Chiswell:

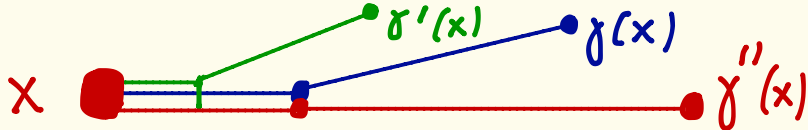
uma função $|\cdot|: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: ① $|id| = 0$

② $|\gamma| = |\gamma^{-1}|$

③ Se $\{\gamma, \gamma'\} < \{\gamma, \gamma''\}$ então $\{\gamma, \gamma'\} = \{\gamma', \gamma''\}$.

Ex: mostrar que $|g| = d(x, \gamma(x))$ é uma função de Chiswell:

③ diz o seguinte: a projeção de $\gamma'(p)$ sobre $[x, \gamma(x)]$ é mais próxima de p do que a projeção de $\gamma''(x)$ sobre $[x, \gamma(x)]$. Conseq.: a proj. de $\gamma'(x) = \text{proj. de } \gamma'(x)$

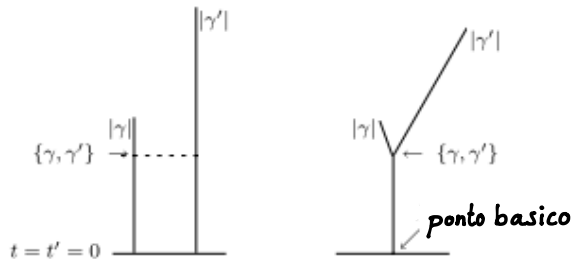


Teorema de Chiswell:

Cada função de Chiswell é induzida por uma T -árvore com ponto básico p .

Também, se T' é uma outra árvore com ponto básico p' e a mesma função de Chiswell, então a árvore minimal de T' que contém a órbita de p' é isomorfa a (T, p) .

Dem.



Construção da árvore:

① tomar $\sqcup_{\gamma} [0, |\gamma|]$ e colar $[0, |\gamma_1|]$ e $[0, |\gamma_2|]$ ao longo de $[0, \{\gamma_1, \gamma_2\}]$.

\Rightarrow espaço topológico que é uma árvore.

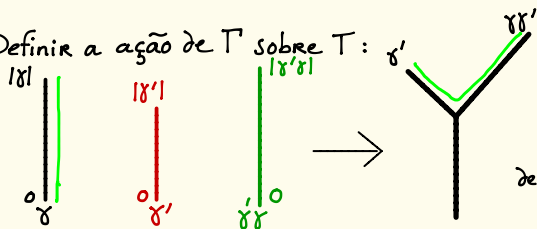
② Por a métrica:

Seja $x \in [0, |\gamma_1|], y \in [0, |\gamma_2|]$:

Ⓐ Se x ou y é $\leq \{\gamma_1, \gamma_2\}$, $d(x, y) := |x - y|$;

Ⓑ Se não, $d(x, y) := x + y - 2\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

③ Definir a ação de T sobre T :



Os 2 segmentos são isométricos,

definir a ação de γ como isometria neste segmento $[0, |\gamma|]$.

Voltando no teorema principal: Seja G não elementar e com um número finito de geradores:

Seja (ρ_i) uma sequência de representações discretas, injetivas de G em $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$: então uma das duas possibilidades seguintes vai acontecer, depois de tomar uma subsequência:

1) $\rho_n \xrightarrow{\text{alg.}} \rho_\infty$ (pode ser depois de uma conjugação);

ou 2) \exists uma "representação $\rho: G \rightarrow \text{Isom}(T)$ " onde T é uma " \mathbb{R} -árvore" tal que " $\rho_n \rightarrow \rho$ ".

podemos precisar a parte 2):

2)' \exists uma ação não trivial, minimal de G sobre uma \mathbb{R} -árvore T , e pontos básicos $p_i \in \mathbb{H}^3$, e $p \in T$, e uma sequência $\varepsilon_i \rightarrow 0$ tais que:

se $|\cdot|_{\rho_i} := d(p_i, \rho_i(g)(p_i))$, então as funções $\varepsilon \cdot |\cdot|_{\rho_i} \rightarrow |\cdot|$ ("função norma associada à (T, ρ) ").
 $\Leftrightarrow |g| = d(p, g(p))$

Primeira etapa: "escolher os pontos básicos p_i "

Lema: Seja $\rho: G \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ uma representação discreta injetiva de $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ não elementar, então $\exists x \in \mathbb{H}^3$ tal que $\max_j d(x, \rho(g_j)(x))$ é minimal.

Primeira etapa: "escolher os pontos básicos p_i "

Lema: Seja $\rho: G \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ uma representação discreta injetiva de $G = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ não elementar, então $\exists x \in \mathbb{H}^3$ tal que $\max_j (d(x, \rho(g_j)(x)))$ é minimal.

Dem.

$\forall j, x \mapsto d(x, \rho(g_j)(x))$ é tal que: $\lim_{\substack{x \rightarrow \partial \mathbb{H}^3 \\ x \neq \text{Fix}(f_j)}} f_j(x) = +\infty$.

Agora, G não elementar $\Rightarrow \nexists x \in \partial \mathbb{H}^3$ tal que x é ponto fixo de todas as aplicações g_1, \dots, g_k .
 $\Rightarrow \max_j d(x, \rho(g_j)(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \partial \mathbb{H}^3} +\infty$
 \Rightarrow essa função tem um minimum em \mathbb{H}^3 .

Podemos supor, depois de uma conjugação que $\forall \rho_i$ o ponto x do lema é a origem $O \in \mathbb{H}^3$ (modelo da bola).

Def.: Seja $\varepsilon_i := \frac{1}{\max_j d(O, \rho_i(g_j)(O))}$

Caso 1: $\exists M$ tal que $\frac{1}{M} \leq \varepsilon_i$. (i.e. $\forall j, d(O, \rho_i(g_j)(O)) \leq M$)

Neste caso: $\forall j$, a sequência $\rho_i(g_j)$ fica dentro de um compacto K .

Depois de uma extração diagonal podemos supor: $\rho_i \xrightarrow{\text{alg.}} \rho_\infty$.

Caso 2: \exists subseqüência de (ε_i) que tem um limite $= 0$.

Seja $|\cdot|_{\rho_i}$ a função $g \in G \mapsto |g|_{\rho_i} := d(0, \rho_i(g)(0))$.

Lema: pode ser depois de tomar uma subseqüência, mas a seqüência $\varepsilon_i \cdot |\cdot|_{\rho_i}$ tem um limite (na convergência fraca) $g \mapsto |g|$ que é uma função de Chiswell.

Lembra: função de Chiswell:

uma função $|\cdot|: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: ① $|id| = 0$

② $|g| = |g^{-1}|$

③ Se $\{\gamma, \gamma'\} < \{\gamma, \gamma''\}$ então $\{\gamma, \gamma'\} = \{\gamma', \gamma''\}$.

Dem. do lema:

Já sabemos: $\varepsilon_i |g_j|_{\rho_i} \leq 1 \quad \forall g_j \in \{g_1, \dots, g_k\}$

Agora, cada $g \in G$ pode ser escrito como $g = g_{i_1} \dots g_{i_r}$ of $r = r(g)$ elementos.

Para cada i , temos: $d(0, \rho_i(g)(0)) \leq d(0, \rho_i(g_{i_1} \dots g_{i_{r-1}})(0)) + d(\rho_i(g_{i_1} \dots g_{i_{r-1}})(0), \rho_i(g_{i_1} \dots g_{i_r})(0))$

$$\Rightarrow |g|_{\rho_i} \leq d(0, \rho_i(g_{i_1} \dots g_{i_{r-1}})(0)) + d(0, \rho_i(g_{i_r})(0))$$

$$(indução) \Rightarrow |g|_{\rho_i} \leq R(g) \cdot \max |g_j|_{\rho_i} \Rightarrow \varepsilon_i |g|_{\rho_i} \leq R(g) \stackrel{\text{ex. diag.}}{\Rightarrow} \forall g, \varepsilon_i |g|_{\rho_i} \rightarrow |g|$$

Agora: vamos mostrar que $|\cdot|: G \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de Chiswell:

Lema de geometria hiperbólica 1:

Seja $0 < \alpha \leq \pi$. Existe $c(\alpha)$ tal que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists L(\alpha, \varepsilon)$ tal que todos triângulos geodesicos ABC com $\hat{B} \in [\alpha, \pi]$ e $BC \geq L$ vão satisfazer:

1) $|AB + BC - AC| \leq c(\alpha)$;

2) $\hat{C} \leq \varepsilon$



Dem. do lema:

Lei do cosh: $\cosh AC = \cosh AB \cosh BC - \cos(\hat{B}) \cdot \sinh(AB) \sinh BC$

$$-1 \leq \cos \hat{B} \leq \cos \alpha$$
$$-\cosh C - \cos \alpha$$

Conseqüência: (a) $\cosh AC \leq e^{AB+BC} + e^{AB+BC} = 2e^{AB+BC}$

também:

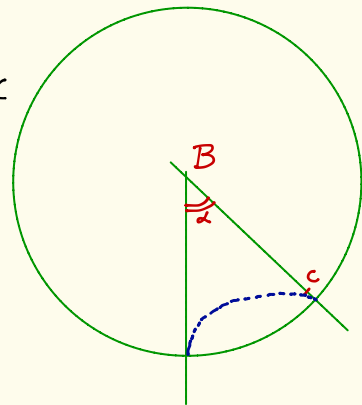
(b) $\cosh AC = \cosh AB \cosh BC - \cos(\hat{B}) \cdot \sinh(AB) \sinh BC$
 $\geq \frac{1}{2} e^{AB} \cdot \frac{1}{2} e^{BC}$

então, se $\hat{B} \geq \frac{\pi}{2}$, $\cosh AC \geq \frac{1}{4} e^{AB+BC}$,

se $\hat{B} \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$ com $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\cosh AC \geq \frac{1}{4} e^{AB+BC} - \cos \alpha \frac{1}{4} e^{AB+BC}$$

Resultado: $C_1(\alpha) e^{AB+BC} \leq \cosh(AC) \leq C_2(\alpha) e^{AB+BC}$



Fim da demonstração:

Seja (p_i) uma sequência de representações discretas, injetivas de G em $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$:
então uma das duas possibilidades seguintes vai acontecer, depois de tomar uma subsequência:

1) $p_n \xrightarrow{\text{alg.}} p_\infty$ (pode ser depois de uma conjugação);

2) \exists uma ação não trivial, minimal de G sobre uma \mathbb{R} -árvore T , e pontos bases $p_i \in \mathbb{H}^3$, e $p \in T$,
e uma sequência $\varepsilon_i \rightarrow 0$ tais que:

se $|\cdot|_{p_i} := d(p_i, p_i \cdot g(p_i))$, então as funções $\varepsilon_i \cdot |\cdot|_{p_i} \rightarrow |\cdot|$ ("função norma associada à (T, p) ").
 $\Leftrightarrow |g| = d(p, g(p))$

Escolha de ε_i : a) existência de $\varepsilon_i := \frac{1}{\max_j d(0, p_i \cdot g_j(0))}$ e, no caso 2) podemos supor $\varepsilon_i \rightarrow 0$.

b) $\varepsilon_i \cdot |g|_{p_i} \xrightarrow{\exists} |g|$ para cada $g \in G$.

Propriedades dessa ação $G \times T \rightarrow T$:

Teorema: essa ação é minimal e tem pequenos estabilizadores de arestas.

Def: Uma ação de G sobre T por isometrias é minimal se \nexists sub-árvore $\phi \neq T \subset T$ invariante.

Def: uma ação tem "pequenos estabilizadores de arestas" se cada subgrupo de G que deixa invariante um segmento de T é elementar.

TEOREMA de SKORA: _____

Seja $\Gamma \times T \rightarrow T$ uma ação não trivial, minimal, com pequenas estabilizadoras de arestas de um grupo Fuchsiano Γ em T que satisfaz:

$\forall \gamma$ parabolico em Γ , a distancia de translação de γ em T é zero.

Então a ação é "geométrica".

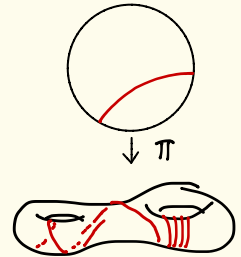
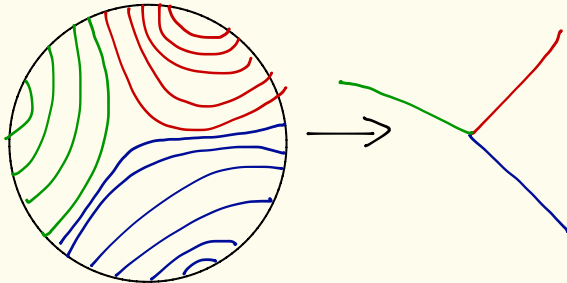
Def: "ação geométrica":

① "laminação geodesica" $\lambda \subset \mathbb{H}^2/\Gamma$ é uma união de geodesicas completas:

② Criar $\tilde{\lambda} := \pi^{-1}(\lambda)$ em \mathbb{H}^2 .

③ Partição de \mathbb{H}^2 :

em conjuntos fechados que são: componente de $\mathbb{H}^2 - \tilde{\lambda}$
ou
folha de $\tilde{\lambda}$



Minimalidade: (Lembra que: $|g| := d(p, g(p))$.)

ação é minimal $\iff \exists g \in G$ tal que $|g^2| = 2|g| \neq 0$.

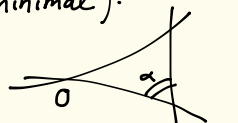
Vamos escrever $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ ("geradores de G ").

Lembra que nos escolhemos uma conjugação tal que $O \in \mathbb{H}^3$ vai minimizar $\max_j d(x, \rho_i(g_j)(x))$

Podemos re-escrever g_1, \dots, g_n os elementos que realizam o mínimo.

(observar: $\forall j, 1 \leq j \leq n, \varepsilon_i \cdot d(O, \rho_i(g_j)(O)) = 1$! então $|g_j|_{\rho_i} \rightarrow \infty$.)

Vamos supor: $O \notin \text{Eixo}(g_j)$ (se não, a ação é minimal). $\rho_i g_j(O)$



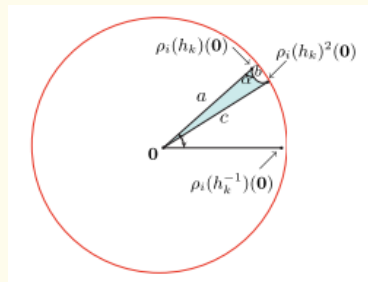
Agora, se $\widehat{\rho_i g_j(O)} \geq \alpha$ (indep. de i)

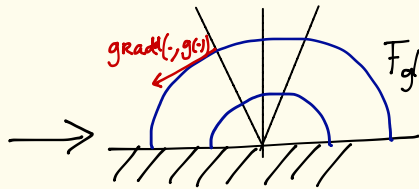
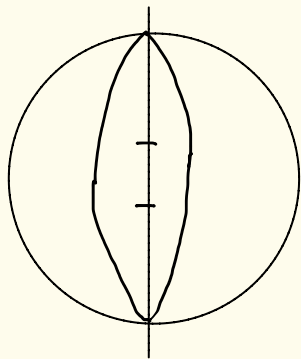
e $d(O, \rho_i(g_j)(O))$ não é limitada [tomar as g_j tq $|g_j| \neq 0$]

$\implies ||g_j^2|_{\rho_i} - 2|g_j|_{\rho_i}| \leq C(\alpha)$ [depois $\times \varepsilon_i$], podemos obter $|g_j^2| = 2|g_j|$.

Então, suponhamos $\widehat{\rho_i(g_j)(O)} \rightarrow 0$

↖ angulo em $\rho_i(g_j)(O)$.





$F_g(x) := d(x, g(x))$ é constante nessas retas.

Caso: existe somente um elemento, g_1 , que vai Realizar o minimo (impossivel):

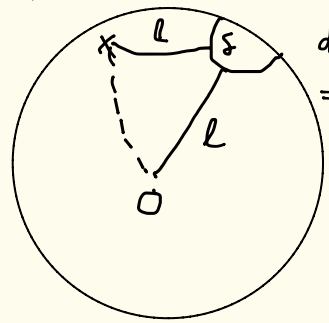
Caso: $\exists g_1, g_2$ (ou mais) que realizam o min.



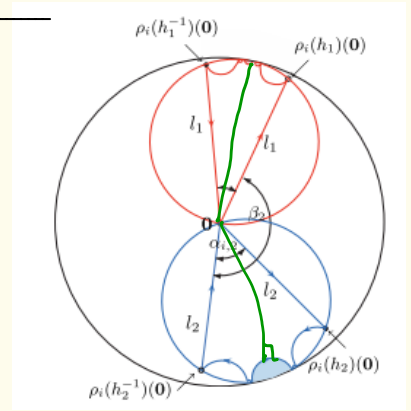
Lema: $\exists g_{j_1}, g_{j_2}$ tais que $\nabla F_{g_{j_1}}$ e $\nabla F_{g_{j_2}}$ formam um angulo $\geq \pi/2$

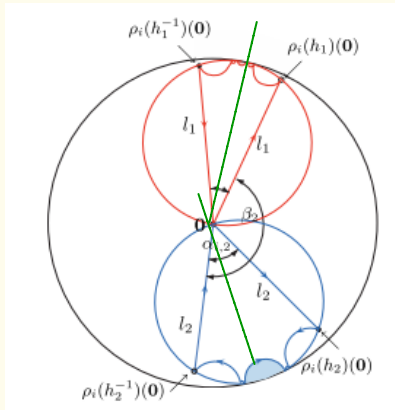
Lema: $|g_1, g_2| \neq 0$

Demo:



$d(O, \rho_i g_1(0)) \rightarrow \infty$
 $\Rightarrow d(O, \text{eixo}(g)) \rightarrow \infty$
 Não funciona!





Escolher entre $h_1, h_1^{-1}, h_2, h_2^{-1}$ para obter triângulo com ângulo em O que seja $\geq \frac{\pi}{3}$ por exemplo.

Ex. caso $[O, g_1(o), g_2^{-1}(o)]$

$d(O, g_1(o)) + d(O, g_2^{-1}(o)) - d(g_1(o), g_2^{-1}(o))$ é limitada.

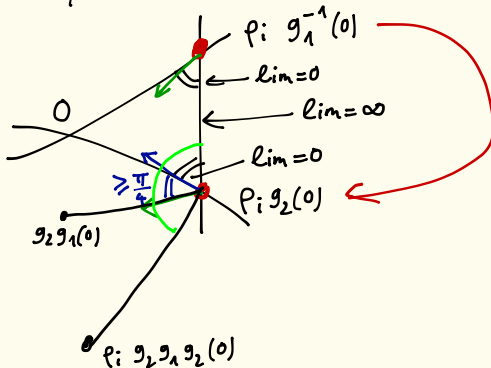
$$d(O, g_1^{-1} g_2^{-1}(o))$$

$$d(g_2 g_1(o), O)$$

$$\Rightarrow |g_2 g_1| \neq 0$$

\Rightarrow ângulos em $\rho_i(g_2^{-1}(o))$ e $\rho_i(g_1(o)) \rightarrow 0$.

Consequência:



$\rho_i(g_2 g_1)$

Observar: $\widehat{O g_2(o) g_2 g_1(o)}$
 $= \widehat{g_2^{-1}(o) O g_1(o)} \geq \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \widehat{g_1^{-1}(o), g_2(o), g_2 g_1 g_2(o)} \geq \frac{\pi}{4}$$

Agora $d(g_1^{-1}(o), g_2(o)) = d(g_2(o), g_2 g_1 g_2(o))$

$$\Rightarrow |d(g_1^{-1}(o), g_2 g_1 g_2(o)) - 2d(g_1^{-1}(o), g_2(o))| \leq C \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow |(g_1 g_2)^2| = 2 |g_1 g_2| \neq 0$$

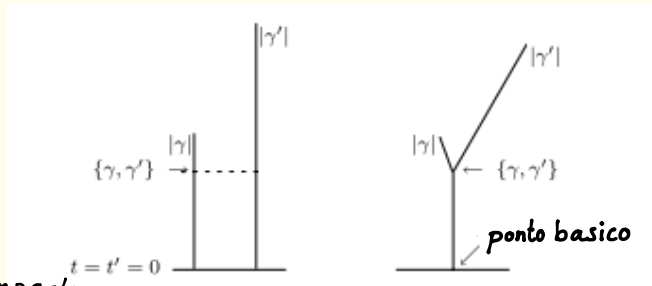
Ação tem "pequenos estabilizadores de arcos":

Por contradição: vamos supor que \exists arco com um grupo estabilizador $H \subset G$, H não elementar.

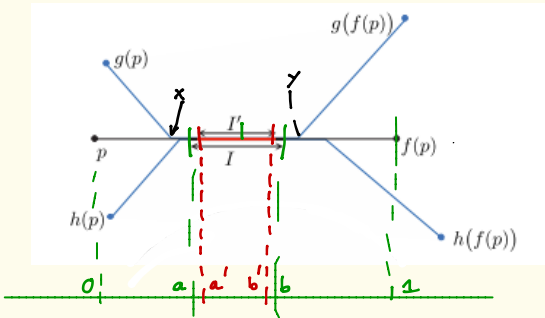
Agora: H não elementar $\Rightarrow H \supset \langle g, h \rangle$ livre.

Podemos reduzir (i.e. cortar) o arco I invariante e supor $A \subset [p, f(p)]$.

(Lembra: construção de T)



Podemos reduzir mais e supor $\begin{cases} I' \text{ compacto} \\ I' \subset I \text{ invariante} \end{cases}$

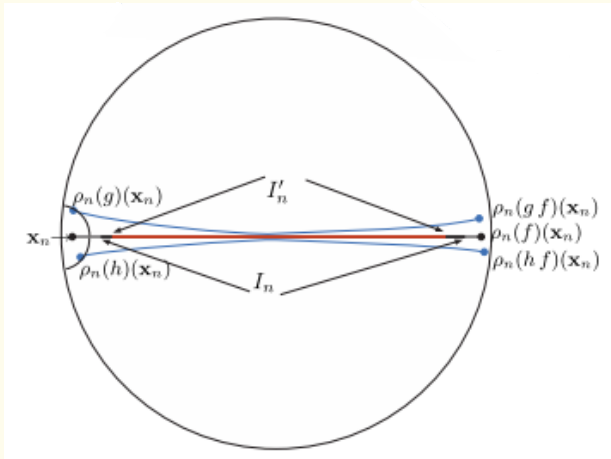


Lema: $I' \subset [x, y]$.

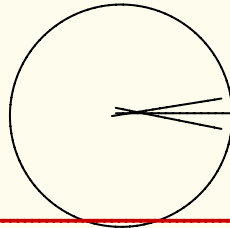
Dem: $I' \cap ([p, f(p)] \cap g([p, f(p)])) = [x, y]$.

Qual é a situação em \mathbb{H}^3 ?

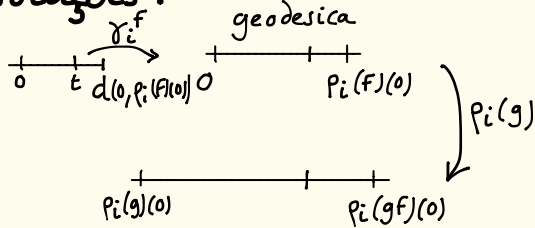
Em \mathbb{H}^3 :



Na verdade, $x_n :=$ ponto base $= O$
então o desenho deveria ser:



Notações:



Lema: Sejam $a < a' < b' < b$, e $\varepsilon > 0$.

Para i grande e $a' \cdot d(0, \rho_i(F)(0)) \leq t \leq b' \cdot d(0, \rho_i(F)(0))$
temos que:

$$d(\rho_i(g) \circ \chi_i^F(t), \chi_i^F(t + d(0, \rho_i(F)(0)) - d(0, \rho_i(gF)(0))) \leq \varepsilon$$

Dem: lembra que:

$$\{g, g'\} := \frac{1}{2} (|g| + |g'| - |\bar{g}^1 g'|) \quad (\text{def.})$$

$$\text{e também} = \lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i \cdot d(0, \pi^i(g')) \quad (\text{lema})$$

onde $\pi^i(g') :=$ ponto de $[0, \rho_i(g)(0)]$ mais
proximo de $\rho_i(g')(0)$.

então: $\frac{\varepsilon_i \cdot d(0, \pi^i(gf))}{\varepsilon_i \cdot d(0, \rho_i(f)(0))}$ proj. de $\rho_i(gf)(0)$ em $[0, \rho_i(f)(0)]$.

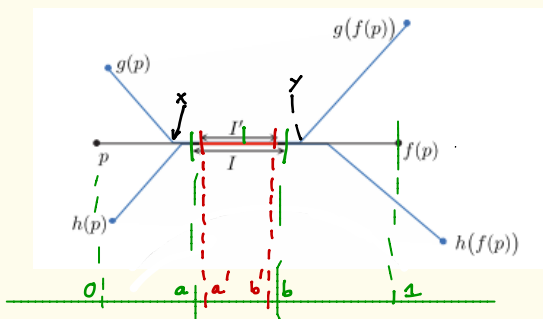
$$\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \frac{\{f, gf\}}{|f|} = \text{parâmetro de } \gamma, \geq b.$$

isto é: $\lim \frac{d(0, \pi^i(gf))}{d(0, \rho_i(f)(0))} \geq b$

Consequência:

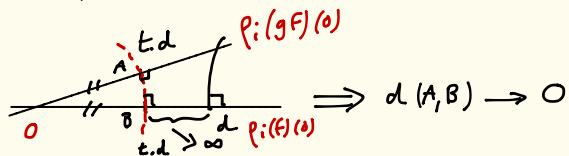
a projeção $\pi^i(gf)$ é sempre a distancia

do ponto de parâmetro b em $[0, \rho_i(f)(0)]$, maior do que $|b - b'| \cdot d(0, \rho_i(f)(0)) \rightarrow \infty$.



Agora: sabemos que $d(0, \pi^i(gf)) \rightarrow \infty$

Lema:



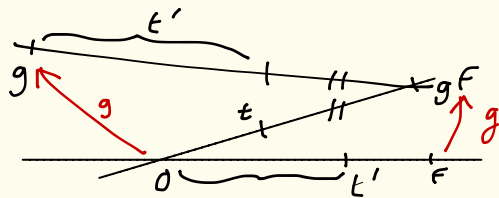
Demo. na prox. pagina.

Vamos fazer o mesmo com triângulo $[0, \rho_i(g)(0), \rho_i(gf)(0)]$:

como escolher t' ?

$$\text{queremos: } d(0, gf(0)) - t = d(0, f(0)) - t'$$

$$\Rightarrow t' = t + d(0, f(0)) - d(0, gf(0))$$



Com o mesmo lema:

$$d(\gamma_i^F(t), \gamma_i^{g^F}(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(\gamma_i^{g^F}(t), \rho_i(g) \circ \gamma_i^F(t + d(0, \rho_i(F)(0)) - d(0, \rho_i(g^F)(0)))) \leq \varepsilon/2$$

$$d(\gamma_i^F(t), \rho_i(g) \circ \gamma_i^F(t + L)) \leq \varepsilon$$

$$\text{ou: } d(\rho_i(g^{-1})(\gamma_i^F(t)), \gamma_i^F(t+L)) \leq \varepsilon \quad \text{i.e. } g^{-1} \text{ é } \varepsilon\text{-próxima de uma translação de dist. } L$$

mesmo argumento para h, h^{-1} e g .

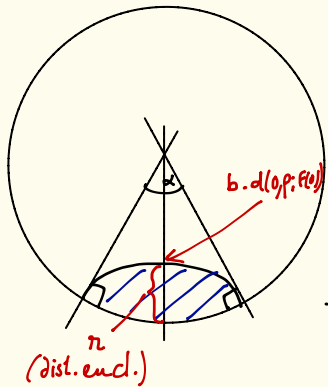
Consequência: $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ vai agir como $\underbrace{T \cdot T \cdot T^{-1} \cdot T^{-1}}_{\text{id}}$ ($\pm 4\varepsilon$) nas pontas do arco invariante.

Margulis:

$\begin{cases} \varepsilon \text{ pequeno: o subgrupo } H \subset G \text{ dos elementos } g \text{ tais que } d(x, g(x)) \leq \varepsilon \text{ é elementar.} \\ x \in \mathbb{H}^3 \end{cases}$

Então $\langle [g, h], [g, h^2] \rangle$ é elementar (impossível).

Demo. do lema: $\forall t \in [0, b']$, $d(\gamma^f(t), \gamma^{g^f}(t)) \rightarrow 0$



Já sabemos que $\pi^i(p_i(g^f(0)))$ na reta $(0, p_i(f(0)))$ é "depois" do ponto com parametro $t = b \cdot d(0, p_i(f(0)))$.

Então o ponto $p_i(g^f(0))$ tem que ser dentro do semi-circulo D

Isso vai ajudar para controlar precisamente o angulo em O (do triangulo $(f(0), 0, g^f(0))$)

Temos $\text{Sen } \alpha = \frac{\pi/2}{R} = \pi/2 \Rightarrow \alpha \sim \frac{\pi}{2}$, $\text{cos } \alpha \sim 1 - \frac{\pi^2}{8}$

Dist. hiperbolica: $\left(\frac{0}{0}\right) d(0, \gamma) = \ln\left(\frac{2-\pi}{\pi}\right)$ (porque $d(0, \gamma) = \ln\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$)

Mas: formula do cosh:

$$\text{ch } x = \text{ch}^2\left(\frac{t \cdot |f|}{\varepsilon_i}\right) - \text{cos } \alpha \cdot \text{sh}^2\left(\frac{t \cdot |f|}{\varepsilon_i}\right) \sim \underbrace{\text{ch}^2(\cdot) - \text{sh}^2(\cdot)}_1 + \frac{R^2}{8} \cdot \text{sh}^2\left(\frac{t \cdot |f|}{\varepsilon_i}\right)$$



$$\left. \begin{array}{l} t \cdot d(0, p_i(f(0))) \\ \frac{t \cdot |f|}{\varepsilon_i} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Agora: } \ln\frac{2-\pi}{\pi} = \frac{b|f|}{\varepsilon_i} \Rightarrow \pi \approx \frac{2}{1 + e^{b|f|/\varepsilon_i}} \\ \approx 2 \cdot e^{-b|f|/\varepsilon_i} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} \cdot \text{sh}^2\left(\frac{t \cdot |f|}{\varepsilon_i}\right) \approx \frac{1}{2} e^{\frac{|f|}{\varepsilon_i}(2t-2b)} < 0 \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

Conclusão: $\text{ch}(x) \rightarrow 1$
 $\Rightarrow x \rightarrow 0!$