Monitoria
Análise complexa

Mat 0320

24 abril março de 2014

1. Obtenha o valor da integral $\int_C (z-1)dz$ onde
   - $C :=$ é o caminho descrito pelo semi-circulo com equação $z = 1 + e^{i\theta}$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$ que conecta a 0 com 2;
   - $C :=$ é o segmento sobre o eixo real que conecta a 0 com 2.

2. Calcular o valor da integral $\int_C \bar{z}^2 dz$ onde
   - $C :=$ é o caminho descrito pela grafica da curva $y = x^2 + 1$ conectando a i com $1 + 2i$;
   - C é o caminho conectando a i com $1+2i$ seguindo a seguinte concatenação de caminhos: vai primeiro pelo segmento reto paralelo ao eixo real que conecta i com $1+i$ e depois continua por um segmento reto paralelo ao eixo imaginário conectando $1+i$ com $1+2i$.

   O valor da integral muda ao percorrer por caminhos diferentes? ou é igual?

3. Obtenha o valor da integral $\int_C f(z)dz$ onde f é a função definida por $f(z) := y - x - 3x^2 i$ e C é o caminho conectando a 0 com $1+i$ seguindo a seguinte concatenação de caminhos: vai primeiro pelo segmento reto sobre o eixo y que conecta 0 com i e depois continua por um segmento reto paralelo ao eixo x conectando i com $1+i$.

   Se agora integra ao longo do segmento reto que liga os mesmos pontos, o valor da integral acima muda? Faça o mesmo analise no caso em que a função f acima esteja definida por $f(z) = z$. O que pode concluir?

4. Mostre que, se m, n sao inteiros, então o valor da integral $\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta}\, d\theta$ é 0 se $m \neq n$ e 2π se $m = n$. Usando esse resultado obtenha o valor da integral $\int_C z^m \bar{z}^n dz$ onde C o caminho cuja traça é descrita pela equação do circulo $|z| = 1$ orientado em sentido anti-horario.

5. Obtenha o valor da integral $\int_C \pi e^{\pi \bar{z}}\, dz$ onde C é o bordo do quadrado $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{C}$ orientado em sentido anti-horario.

6. Obtenha o valor da integral $\int_C e^z\, dz$ onde
   - $C :=$ o segmento de reta conectando 1 com i;
   - $C :=$ é um arco do circulo $|z| = 1$ no primer quadrante conectando 1 com i;
   - $C :=$ o caminho conectando a 1 com i seguindo a seguinte concatenação de caminhos: vai primeiro pelo segmento reto paralelo ao eixo y que conecta 1 com $1+i$ e depois continua por um segmento reto paralelo ao eixo x conectando $1+i$ com i.

7. Seja C a quarta parte do circulo com equação cartesiana $x^2 + y^2 = 4$ conectando a $(2,0)$ com $(0,2)$. Sem calcular o valor da integral, mostre que $|\int_C \frac{1}{z^2-1}\, dz| \leq \frac{\pi}{3}$.

8. Se C é o segmento de reta que conecta i com 1. Sem calcular o valor da integral, mostre que $|\int_C \frac{1}{z^4}\ dz| \leq 4(2^{1/2})$.

9. Determine uma cota superior para o modulo de $\int_C e^{1/z}\ dz$ onde C é a quarta parte do circulo $|z| = 1$ orientado no sentido anti-horario.

10. Usando o Teorema de *Cauchy-Goursat* prove que $\int_C z^n\ dz = 0$ para todo inteiro $n \geq 0$ e C é qualquer caminho fechado simple. Verifique o seu resultado sem usar dito teorema no caso especifico em que C seja a imagem do caminho α definido pela equação $\alpha(\theta) = re^{i\theta}$ com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

    No caso $n \leq 0$, pode usar *Cauchy-Goursat* para concluir o valor de $\int_C z^n\ dz$?

    Com os resultados de acima prove que

$$\int_{|z|=r} z^n\ dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{se } n = -1 \end{cases}. \tag{1}$$

11. Em qual das seguintes integrais é aplicável o Teorema de *Cauchy-Goursat* $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z+2i}\ dz$; $\int_{|z+3i|=1} \frac{\sin z}{z+2i}\ dz$; $\int_{|z|=1/2} \frac{1}{(z-1)^4+1}\ dz$; $\int_{|z|=3} \frac{1}{1-e^z}\ dz$; $\int_{|z-3i|=6} e^{\bar{z}}\ dz$ e $\int_0^{1+i} z^3\ dz$ ao longo do segmento de reta $y = x$ conectando 0 com $1 + i$.

12. Aplicando o Teorema de Cauchy-Goursat mostre que $\int_C f(z)\ dz = 0$ quando C é o circulo $|z| = 1$ com orientação anti-horaria[1] e f está definida pelas formulas de embaixo:

$$f(z) = \frac{z^2}{z-3}; \quad f(z) = \frac{z}{e^z}; \quad f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$$

13. Determine o valor da integral $\int_C \frac{1}{z}\ dz$ onde $C :=$ é o bordo do conjunto $\{x + iy \mid x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$.

14. Seja B o conjunto aberto e conexo em $\mathbb{C}$ com duas componentes de bordo formadas pelo circulo $|z| = 4$ e pelo bordo do quadrado $\{x + iy \mid x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$. Assuma que B tem uma orientação. Explique porque $\int_B f(z)\ dz = 0$ quando

$$f(z) = \frac{1}{3z^2+1}; \quad f(z) = \frac{z+2}{\sin(z/2)}; \quad f(z) = \frac{z}{1-e^z}$$

15. Usando ferramentas de analise complexa prove que:

    (a)
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta + \theta)]\ d\theta = 0 \text{ e } \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}[\sin(\sin\theta + \theta)]\ d\theta = 0$$

    (b) para todo $|a| > 1$ real, tem-se que $\int_0^{2\pi} \frac{1-a\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\ d\theta = 0$

16. Seja ([2])C o bordo do quadrado cujos lados estão sobre os lados das retas verticais $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$. Determine em cada caso o valor das integrais abaixo mencionadas:

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z - i\pi/2}\ dz; \quad \int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\ dz; \quad \int_C \frac{z}{2z+1}\ dz$$

[1] E se toma a orientação horaria, o valor da integral muda?
[2] O bordo está orientado positivamente

17. Seja C o circulo $|z| = 3$ orientado no sentido anti-horario. Mostre que se

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w}\ dz, \quad |w| \neq 3.$$

Então $g(2) = 8\pi i$. Qual é o valor da integral de a função g no caso em que $|w| > 3$?

18. Usando a formula integral de *Cauchy extendida* determine o valor das integrais abaixo mencionadas

- $\int_{|z-2i|=2} \frac{\cos z}{z^2+1}\ dz$
- $\int_{|z|=2} \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3}\ dz$
- $\int_{|z-4|=2} \frac{\cos z}{(z-1)^3(z-5)^2}\ dz$
- $\int_{|z-1|=2} \frac{1}{(z+2)(z-i)^2}\ dz$

19. Usando a formula integral de Cauchy mostre que $\int_C \frac{e^{az}}{z^{n+1}}\ dz = \frac{2\pi i a^n}{n!}$ onde C é o circulo $|z| = 1$ orientado no sentido anti-horario. A partir de seu resultado conclua que

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta - n\theta)\ d\theta = \frac{2\pi a^n}{n!}$$

e

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \sin(a\sin\theta - n\theta)\ d\theta = 0$$

.

20. Determine uma primitiva primitiva da função $g(z) = ze^z$ e use-a para obter o valor das integrais $\int_i^z we^w dw$ e $\int_i^1 ze^z dz$

21. (*) Obtenha o valor das integrais embaixo

- $\int_{|z|=3} \frac{\cos(z-1)}{(z+1)(z-2)}\ dz$
- $\int_C \frac{e^{-z}}{(z^2-1)}\ dz$ onde C é o bordo do quadrado com vertices $z = \pm 2$ e $z = \pm 2i$
- $\int_C \frac{e^{-z}}{(z^2-1)^2}\ dz$ onde C é o bordo do quadrado com vertices $z = \pm 2$ e $z = \pm 2i$