MAT2352 - Cálculo para Funções de Várias Variáveis II

Lista 5

1. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:
(a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.
(b) S é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$.
(c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + 2y = 2$.
(d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.
(e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$.
(f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$.
Resp. (a) $\frac{6}{35}$, (b) $\frac{31}{8}$, (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2} \arcsin \frac{2}{3}$, (d) $\frac{1}{6}$, (e) $\frac{1}{3}$, (f) $\frac{16}{3}r^3$.

2. Determine o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, com $a > 0$.

3. Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem densidade ρ, nos seguintes casos:
(a) $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ e $\rho(x, y) = x^2$.
(b) D é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$ e $\rho(x, y) = x + y$.
(c) D é a região do primeiro quadrante limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 1$ e $\rho(x, y) = xy$.
(d) D é a região limitada pela parábola $y^2 = x$ e a reta $y = x - 2$ e $\rho(x, y) = 3$.
Resp. (a) $\frac{2}{3}$, $(0, \frac{1}{2})$, (b) 6, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$, (c) $\frac{1}{6}$, $(\frac{4}{7}, \frac{3}{4})$, (d) $\frac{27}{2}$, $(\frac{8}{5}, \frac{1}{2})$.

4. Determine os momentos de inércia I_x, I_y e I_0 das lâminas descritas nos itens (c) e (d) do exercício anterior. Resp. (c) $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{13}{80}$, (d) $\frac{189}{20}$, $\frac{1269}{28}$, $\frac{1917}{35}$.

5. Calcule as integrais triplas:
(a) $\int\int\int_D yz \, dxdydz$, onde $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2z, 0 \leq x \leq z + 2\}$.
(b) $\int\int\int_D y \, dxdydz$, onde D é a região abaixo do plano $z = x + 2y$ e acima da região no plano xy limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$.
(c) $\int\int\int_D xy \, dxdydz$, onde D é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.
(d) $\int\int\int_D z \, dxdydz$, onde D é limitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$.
(e) $\int\int\int_D x \, dxdydz$, onde D é limitada pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.
Resp. (a) $\frac{7}{5}$, (b) $\frac{5}{28}$, (c) $\frac{1}{10}$, (d) $\frac{1}{12}$, (e) $\frac{16\pi}{3}$.

6. Determine a massa e o centro de massa do cubo $Q = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ cuja densidade é dada pela função $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Resp. a^5, $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$.

7. Determine os momentos de inércia de um cubo de densidade constante k e aresta L se um dos seus vértices é a origem e três de suas arestas estão sôbre os eixos coordenados.
Resp. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}kL^5$.

8. Calcule as seguintes integrais:
(a) $\int\int\int_E (x^2 + y^2) \, dxdydz$, onde E é a região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = -1$ e $z = 2$.
(b) $\int\int\int_E y \, dxdydz$, onde E é a região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$, limitada pelo plano xy e pelo plano $z = x + 2$.

(c) $\int\int\int_E x^2\,dxdydz$, onde E é o sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=1$, acima do plano $z=0$ e abaixo do cone $z^2=4x^2+4y^2$.

Resp. (a) 24π, (b) 0, (c) $2\pi/5$.

9. Determine o volume da região R limitada pelos parabolóides $z=x^2+y^2$ e $z=36-3x^2-3y^2$. Resp. 162π.

10. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z=4x^2+4y^2$ e pelo plano $z=a$ $(a>0)$, se S tem densidade constante K. Resp. $\pi Ka^2/8$, $(0,0,2a/3)$.

11. Calcule as integrais:
(a) $\int\int\int_B(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, onde B é a bola unitária $x^2+y^2+z^2\leq 1$.
(b) $\int\int\int_E\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, onde E é a região interior ao cone $\phi=\pi/6$ e à esfera $\rho=2$.
(c) $\int\int\int_E x\,dxdydz$, onde E é o conjunto $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\leq 1$, $x\geq 0$.

Resp. (a) $4\pi/5$, (b) $4\pi(2-\sqrt{3})$, (c) $\frac{3\pi}{2}$.

12. Determine a massa de um hemisfério sólido H de raio a se a densidade em qualquer ponto é proporcional a sua distância ao centro da base. Resp. $K\pi a^4/2$, onde K é a constante de proporcionalidade.

13. a) Calcule o volume da região limitada pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Resp. $\frac{4}{3}\pi abc$.
Sugestão: Use a mudança de variáveis $x=au$, $y=bv$, $z=cw$.
b) Calcule a massa do sólido $S=\{x^2+y^2+z^2\leq r^2,\ z\geq a>0\}$ com densidade $\delta(x,y,z)=z$.
Resp. $\frac{\pi}{4}(r^2-a^2)^2$.