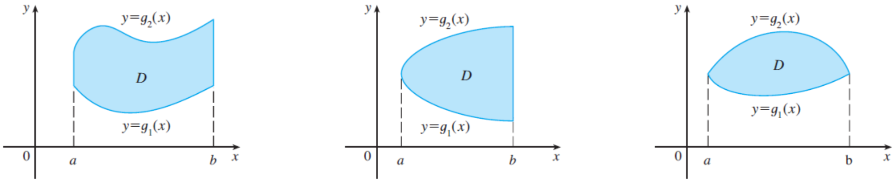
MAT 2352 : Revisão P1, Parte 1

6 de setembro de 2016

Integrais duplas



Teorema

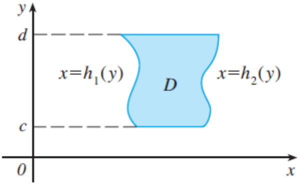
Sejam $c(x)$ e $d(x)$ duas funções contínuas em $[a,b]$ e tais que para todo $x \in [a,b]$, $c(x) \leq d(x)$. Seja B o conjunto

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / c(x) \leq y \leq d(x) \text{ e } x \in [a,b]\}.$$

Se $f(x,y)$ for contínua em B então

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$

Integrais iteradas do tipo II



Teorema

Sejam $a(y)$ e $b(y)$ duas funções contínuas em $[c,d]$ e tais que para todo $y \in [c,d]$, $a(y) \leq x \leq b(y)$. Seja B o conjunto

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a(y) \leq x \leq b(y) \text{ e } y \in [c,d]\}.$$

Se $f(x,y)$ for contínua em B então

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\right] dy.$$

Examplos: tipo I

Exercício (Calcule a seguinte integral:)

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy, \text{ onde } f(x,y) = \sqrt{1+y^3} \text{ e } B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1\}.$$

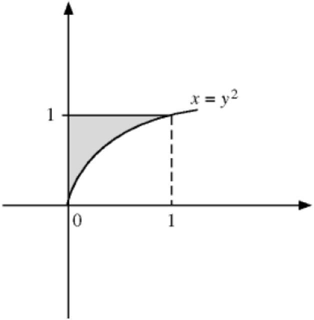
Resp.:

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{a(y)}^{b(y)} \left(\sqrt{1+y^3}\right) dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} \left(\sqrt{1+y^3}\right) dx\right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[x\sqrt{1+y^3}\right]_0^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 y^2\sqrt{1+y^3}\,dy = \frac{2}{9}\left[\left(1+y^3\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$



Examplos: tipo I

Exercício (Calcule a seguinte integral:)

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy, \text{ onde } f(x,y) = \frac{y}{x+y^2} \text{ e}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \ \text{ e } \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}.$$

Resp.:

Temos

$$\iint_B f(x,y)\,dy\,dx = \int_1^4 \left[\int_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{x+y^2}\,dy \right] dx =$$

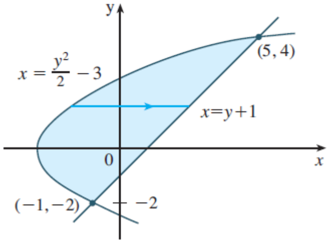
$$= \int_1^4 \frac{1}{2}\left[\ln\left(x+y^2\right)\right]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_1^4 (\ln 2x - \ln x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \ln 2\,dx =$$

$$= \frac{\ln 2}{2}\,[x]_1^4 = \frac{3}{2}\ln 2.$$

Exercício

Calcule $\iint_B xydxdy$ *onde B é a região limitada pela reta* $y = x - 1$ *e pela parábola* $y^2 = 2x + 6$.

Resp.:



$$= \int_{-2}^{4} \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\, dx\, dy = \int_{-2}^{4} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} y\left[(y+1)^2 - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)^2\right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^{4} = 36$$

Aplicações : cálculo de áreas

Teorema

A área de um domínio B (de tipo I ou II) pode ser calculada como:

$$\text{Área}(B) = \iint_B dxdy.$$

Observação: as vezes podemos encontrar a notação dA para $dxdy$. Este dA pode ser visto como um *elemento de área*.

Exercício (Calcule a área de B:)

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ln x \leqslant y \leqslant 1 + \ln x,\, y \geqslant 0 \text{ e } x \leqslant e\}.$$

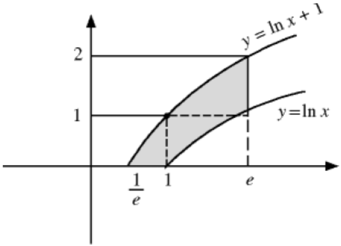
Resp.:

$$\text{Área} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \int_{0}^{1+\ln x} dy\, dx + \int_{1}^{e} \int_{\ln x}^{1+\ln x} dy\, dx$$

$$\text{Área } = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (1+\ln x)\, dx + \int_{1}^{e} dx$$

$$\text{Área } = \int_{\frac{1}{e}}^{1} dx + \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\, dx + \int_{1}^{e} dx$$

$$\text{Área } = [x]_{1/e}^{1} + [x \ln x - x]_{1/e}^{1} + [x]_{1}^{e} = e + e^{-1} - 1.$$



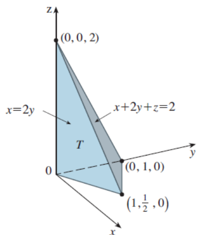
Teorema

Se $f(x,y) \geq 0$*, então o volume* V *do sólido que está acima do domínio* B *e abaixo da superfície* $z = f(x,y)$ *é*

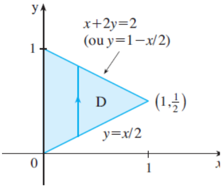
$$V = \iint_B f(x,y)dxdy.$$

Exercício

Calcule o volume do tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0, z = 0.$



Resposta: A base do tetraedro é a seguinte:



$$V = \iint_D (2 - x - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \Big[2y - xy - y^2\Big]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Mais exercícios

Determine o volume do sólido dado.

1. Abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$
2. Abaixo do paraboloide $z = 3x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x$ e $x = y^2 - y$
3. Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices $(1, 1), (4, 1)$ e $(1, 2)$
4. Delimitado pelo paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0$, $y = 1, y = x, z = 0$