MAT 2352 : Aula 16/11/2015

Sylvain Bonnot (IME-USP)

16 de novembro de 2015

Resumo da ultima aula

1. **Superfícies parametrizadas de classe C^1:** $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.
2. **Base de vetores tangentes:**

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k}$$

3. **Área de uma superfície**: Área$(S) = \iint_D \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$.
4. **Área de uma superfície escrita como um gráfico:** se a parametrização é $(u,v) \mapsto (u,v,z(u,v))$ temos

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

5. **Integral de superfície:** dado um campo escalar $f(x,y,z)$,

$$\iint f(x,y,z) dS := \iint_D f(\vec{r}(u,v)) \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv.$$

Exemplo: cálculo da área de uma superfície $\sigma(u, v)$

$$\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2),\ u^2 + v^2 \leqslant 4$$

Temos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, 2u) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (1, 0, 2v).$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\vec{i} - 2v\vec{j} + \vec{k}$$

$$\text{área de } \sigma = \iint_k \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}\, du\, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4\rho^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left[(4\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} (17\sqrt{17} - 1)\, d\theta = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1).$$

Exemplo: cálculo de integral de superfície

$$\boxed{f(x, y, z) = x^2 + y^2 \text{ e } \sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), u^2 + v^2 \leqslant 1}$$

Temos, $f(\sigma(u,v)) = u^2 + v^2$, $\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0 - 2u)$ e $\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, 2v)$.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\vec{i} - 2v\vec{j} + \vec{k}.$$

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\, dS = \iint_K f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv =$$

$$= \iint_K (u^2 + v^2)\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\; du\, dv$$

Passando para coordenadas polares,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 + 4\rho^2}\; \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \Bigg[\underbrace{\int_0^1 (1 + 4\rho^2)^{\frac{1}{2}} \rho^3\, d\rho}_{\text{(por partes)}} \Bigg] d\theta =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} \rho^2 (1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15} (1 + 4\rho^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{4} \left(\frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{15} \right).$$

Exemplo II: cálculo de integral de superfície

$$\boxed{f(x, y, z) = x,\ \sigma(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}),\ 1 \leqslant u^2 + v^2 \leqslant 9,\ \text{ e }\ f(\sigma(u, v)) = u}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right). \text{ Daí,}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = -\frac{u\,\vec{i}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{v\,\vec{j}}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \vec{k} \text{ e}$$

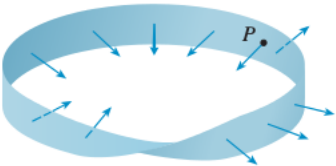
$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{u^2+v^2} + 1} = \sqrt{2}. \text{ Então,}$$

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\, ds = \iint_K f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv =$$

$$= \iint_K u \cdot \sqrt{2} \cdot du\, dv = \sqrt{2} \int_1^3 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos\theta\, d\theta\, d\rho = 0.$$

Superfícies orientadas

- Para uma superfície S podemos escolher em cada ponto 2 vetores normais unitários $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$.
- Se for possível escolher um vetor normal $\vec{n}(x,y,z)$ que varie continuamente sobre S, S é chamada superfície orientada.
- **Exemplo de superfície não orientada:** a faixa de Möbius



- **Caso de um gráfico** $z = g(x,y)$: podemos escolher

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Superfícies orientadas II

- **Caso de uma parametrização** $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$: podemos escolher
$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|}$$
- **convenção:** para uma superfície fechada (i.e fronteira de uma região sólida E), a orientação positiva é aquela para a qual os vetores normais apontam para fora de E.

Fluxo de um campo vetorial

1. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo e $\vec{r}(u,v)$ uma parametrização de uma superfície S. Então a função $(u,v) \mapsto \vec{F}(\vec{r}(u,v)).\vec{n}(\vec{r}(u,v))$ é uma função a valores reais, que podemos integrar na superfície S.
2. **Fluxo de $\vec{F}$ através de S na direção de S:** também chamado integral de superfície de $\vec{F}$ em S:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}dS := \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)).(\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v)dudv,$$

se $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|}$, e

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}dS := -\iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)).(\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v)dudv,$$

se $\vec{n} = -\frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|}$.

Exemplo: cálculo do fluxo de $\vec{F}$ através de S

Sejam $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$, σ a fronteira de B e $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Temos

$$\sigma(u, v) = (u, v, 1 - u - v) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_K \vec{F}(\sigma(u, v)) \underbrace{\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}}_{\vec{n}} \cdot \underbrace{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv}_{dS}$$

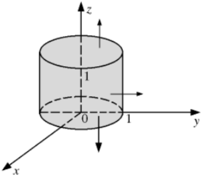
ou seja,

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K (u\vec{i} + v\vec{j} + (1 - u - v)\,\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\, du\, dv =$$

$$= \iint_K du\, dv = \frac{1}{2}, \text{ pois } K \text{ é o triângulo } u \geqslant 0, v \geqslant 0, u + v \leqslant 1.$$

Exemplo IIa: cálculo do fluxo de $\vec{F}$ através de S

Sejam B o cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$, e $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} - \vec{j} + z^2\vec{k}$.



$\sigma_1(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ (superfície lateral do cilindro),
$\sigma_2(u, v) = (u, v, 0)$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$ (base inferior do cilindro) e
$\sigma_3(u, v) = (u, v, 1)$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$ (base superior do cilindro).

Temos

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u\vec{i} + \operatorname{sen} u\vec{j}.$$

Seja $\vec{n}_1 = \cos u\vec{i} + \operatorname{sen} u\vec{j}$ a normal a σ_1.

Exemplo IIb: cálculo do fluxo de $\vec{F}$ através de S

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot n \, dS = \iint_K \left[(\cos u \operatorname{sen} u)\vec{i} - \vec{j} + v^2 \vec{k} \right] \cdot (\cos u \vec{i} + \operatorname{sen} u \vec{j}) \, du \, dv =$$

$$= \iint_K (\cos^2 u \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} u) \, du \, dv =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{\cos^3 u}{3} + \cos u \right]_0^{2\pi} dv = 0.$$

Portanto, o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície lateral do cilindro é zero.
Seja $\vec{n}_2 = -\vec{k}$ a normal a σ_2 e $\vec{n}_3 = \vec{k}$ a normal a σ_3.

Temos

$$\iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_K F(\sigma_2(u,v)) \cdot \vec{n}_2(\sigma_2(u,v)) \, du \, dv =$$

$$= \iint_K (uv\vec{i} - v\vec{j}) \cdot (-\vec{k}) \, du \, dv = 0.$$

Exemplo IIc: cálculo do fluxo de $\vec{F}$ através de S

$$\iint_{\sigma_3} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iint_K F(\sigma_3(u,v))\cdot\vec{n}_3(\sigma_3(u,v))\, du\, dv =$$
$$= \iint_K (uv\vec{i} - v\vec{j} + \vec{k})\cdot(\vec{k})\, du\, dv = \iint_K du\, dv =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\, d\rho\, d\theta = \pi.$$

Então,

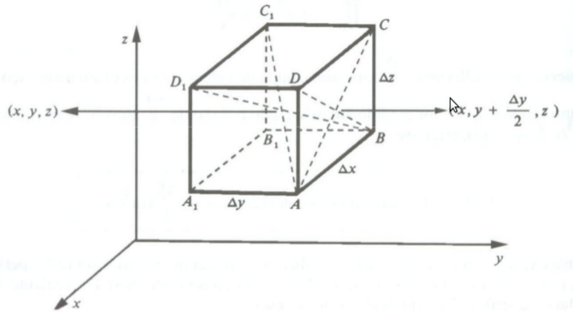
$$\iint_{\sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iint_{\sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\, dS + \iint_{\sigma_2} \vec{F}\cdot\vec{n}_2\, dS + \iint_{\sigma_3} \vec{F}\cdot\vec{n}_3\, dS =$$
$$= 0 + 0 + \pi \Rightarrow \iint_{\sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \pi$$

Teorema da divergência, ou de Gauss

TEOREMA DO DIVERGENTE Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Justificação intuitiva: vamos calcular o fluxo através de uma caixa:



Teorema da divergência, ou de Gauss

- O fluxo de $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ através da face $ABCD$ é aproximadamente
$$\vec{F}(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z).\vec{j}\Delta x\Delta z = Q(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z)\Delta x\Delta z.$$
Mas : $Q(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \simeq Q(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z)\frac{\Delta y}{2}$.
- então o fluxo de $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ através da face $ABCD$ é
$$Q(x, y, z)\Delta x\Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z.$$
- Da mesma maneira o fluxo através da face $A_1B_1C_1D_1$ é aproximadamente
$$-Q(x, y, z)\Delta x\Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z.$$
- **Consequência:** a soma dos fluxos através de $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$ é
$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Exemplo: cálculo do fluxo com o teorema do divergente

Vamos calcular o fluxo do exercício da pagina 10 com o teorema do divergente:

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_B (y+2z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_K \left[\int_0^1 (y+2z)\, dz \right] dx\, dy = \iint_K (y+1)\, dx\, dy$$

onde K é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Mudando para coordenadas polares:

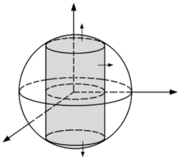
$$\iint_K (y+1)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (\rho \operatorname{sen} \theta + 1)\, \rho\, d\rho \right] d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen} \theta + \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta\, d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \quad ②$$

Exemplo: cálculo do fluxo com o teorema do divergente

Exercício

Sejam $B = \{(x,y,z); x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ *e* $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. *Calcule o fluxo de* $\vec{F}$ *através a fronteira de* B.



Aplicando o teorema da divergência,

$$\iiint_B \underbrace{\operatorname{div}\vec{F}}_{3}\, dx\, dy\, dz = 3\iint_K \left[\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\right] dx\, dy =$$

$$= 6\iint_K \sqrt{4-x^2-y^2}\, dx\, dy = 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4-\rho^2)^{1/2}\,\rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{6}{(-2)}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left[\left(4-\rho^2\right)\right]_0^1}_{(3\sqrt{3}-8)} d\theta = 4\pi(8-3\sqrt{3}) = 32\pi - 12\pi\sqrt{3}$$