Lista 1:

④ Seja Σ σ-álgebra de subconjuntos de X, com um número enumerável de elementos, $\Sigma = (A_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Defina $\forall x\in X$, $R_x := \bigcap_{A_i \ni x} A_i$. Cada $R_x \in \Sigma$ (interseção enumerável).

$\boxed{\text{Lema: } R_x \cap R_y \neq \emptyset \Rightarrow R_x = R_y}$

Dem.: se $z \in R_x \cap R_y \Rightarrow R_z \subset R_x \cap R_y$. Agora, $x \in R_z \Rightarrow R_x = R_z$. Se $x \notin R_z \Rightarrow x \in R_x - R_z \subsetneq R_x$ (impossível).

Da mesma maneira, temos $R_y = R_z \; (= R_x)$.

Agora, o conjunto $\{R_x, x\in X\}$ é enumerável (porque $\subset \Sigma$). Cada $B \in \Sigma$ pode ser escrito como $B = \bigcup_{x\in B} R_x$,

porque: $\forall x \in B$, $R_x \subset B$ então $\bigcup_{x\in B} R_x \subset B$, e $\forall x \in B$, $x \in R_x \subset \bigcup_{x\in B} R_x$ então $B \subset \bigcup_{x\in B} R_x$.

⑧ 1) $a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n \geqslant 0$ se os $\mu_i \geqslant 0$.

2) $(a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n)\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) = \sum_1^\infty (a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n)(A_k)$ (se as A_i disjuntos), porque $\forall i$, $a_i\mu_i\left(\bigcup A_n\right) = \sum_1^\infty a_i\mu_i(A_n)$.

⑨ $\Rightarrow$: a seq. $B_n := X - A_n$ é crescente de união X, então X é união disjunta de $B_1 \cup (B_2 - B_1) \cup (B_3 - B_2) \cdots$ e $\mu(X) = \mu(B_1) + \sum_2^\infty \mu(B_n - B_{n-1})$

O n-ésima resto é: $\mu(X) - \mu(B_n) = \mu(A_n) \to 0$ (porque a série converge).

$\Leftarrow$ mesma demonstr.

⑩ $\mu_E(\emptyset) = \mu(E\cap\emptyset) = 0$; $\mu_E \geqslant 0$; $\mu_E\Big(\bigcup_1^\infty \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disjuntos}}}{A_n}\Big) = \mu\Big(\bigcup_1^\infty \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disj.}}}{E\cap A_n}\Big) = \sum_1^\infty \mu_E(A_n)$.

Lista 2:

③ Vamos mostrar: $\mu(E) = \mu^*(E) := \inf\{\sum \ell(I_n);\ E \subset \bigcup_n I_n\}$.

E só observar: 1) qualquer cobertura $\bigcup_n I_n$ de E pode ser escrita como reunião enumerável de intervalos disjuntos

2) qualquer cobertura $\bigcup_n I_n$ de E com intervalos disjuntos pode ser escrita como reunião de

subintervalos dos $(n, n+1)$ (é só remover o conjunto enumerável $\{n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, de medida nula.

Agora, $\mu^*(E) = \mu^*(E+x)$ é facil: existe uma bijeção (= translação por x !) entre coberturas de E e de E+x.

④ ⓐ K fechado (interseção de fechados). $\forall n$, $K \subset [0,1] - \bigcup_1^n \mathcal{U}_n$ de medida $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$.

ⓑ $[0,1] - \mathcal{U}_1 = \{x \in [0,1];\ x = 0,a_1\ldots$ com $a_1 = 0$ ou 2 na base $3\}$. $[0,1] - \mathcal{U}_2 = \{x \in [0,1];\ x = 0,a_1a_2\ldots$ com $a_i \in \{0,2\}$ na base $3\}$, etc...

ⓒ Defina: $x = 0,a_1a_2\ldots \in K \mapsto y = 0,b_1b_2\ldots \in [0,1]$, com $b_i = a_i$ se $a_i = 0$, $b_i = \frac{a_i}{2}$ se $a_i = 2$.

ⓓ $\forall n$, $[0,1] - \bigcup_1^n \mathcal{U}_n$ é reunião de intervalos do tipo $[a_n, b_n]$ com $b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Concl.: cada $x \in K$ é limite de seq. $(a_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ e $(b_{\psi(n)})_{n\geq 1}$.

⑤ Feito na aula.

ⓑ Vamos mostrar $m_*(E) = 1 - m^*(E^c)$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U$ aberto $\supset E^c$ tal que $m_*(E) \leq 1 - m(U) \leq m_*(E) + \varepsilon \Rightarrow m^*(E^c) \leq m(U) \leq 1 - m_*(E)$

e também $1 - m_*(E) - \varepsilon \leq m(U)$. Tomar agora o inf desses $m(U)$ (que é $m^*(E^c)$) para obter $m^*(E^c) \leq 1 - m_*(E)$

e $1 - m_*(E) - \varepsilon \leq m^*(E^c)$.