Introdução às superfícies de Riemann

Sylvain Bonnot

Fevereiro 2015

Nessa primeira aula vamos apresentar o conteúdo do curso, os principais resultados e as definições basicas com primeiros examplos de superfícies de Riemann.

Algumas informações necessárias:

- Meu email: `sylvain@ime.usp.br`

- Endereço do meu site: `www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`

Superfícies de Riemann

Seja X um espaço topológico separado. X é uma **superfície topológica** se todo ponto de X tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^2$.

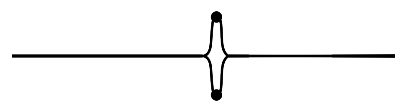

Figura 1: Um espaço que não é separado: a **linha com duas origens** é obtido com a colagem de duas copias de $\mathbb{R}$ ao longo de $\mathbb{R} - \{0\}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma **carta holomorfa** de X é um homeomorfismo φ de um aberto U (chamado o domínio da carta φ) de X sobre um aberto de $\mathbb{C}^n$. Sejam φ e ψ duas cartas de X de domínios respectivos U e V. Então $\gamma := \psi \circ \varphi^{-1}$ é um homeomorfismo do aberto $\varphi(U \cap V)$ até $\psi(U \cap V)$, chamado *função de transição*.

Definição 1. *Um atlas holomorfo no espaço topológico X é uma familia $(\varphi_i)_{i \in I}$ de cartas holomorfas com domínios U_i tal que:*

(a) As cartas cobram X: isto é $X = \bigcup_i U_i$

(b) As funções de transições φ_{ij} são holomorfas, onde

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j).$$

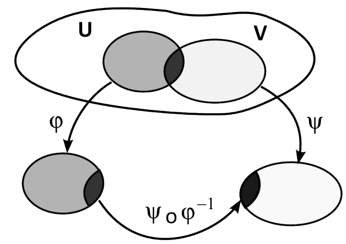

Figura 2: Função de transição

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

.

Uma *variedade complexa* é um espaço topológico X, Hausdorff [1] e com base enumerável, equipado com um atlas holomorfo maximal. O número n é chamado de dimensão complexa de X.

[1] Lembra que um espaço separado é também chamado "espaço de Hausdorff".

Porque pedir uma base enumerável? Simplesmente para poder utilizar **partições diferenciáveis da unidade**:

Teorema. *Uma variedade diferenciável M possui uma partição diferenciável da unidade se e só se toda componente conexa de M é de Hausdorff e tem base enumerável.*

Lembra que uma *partição diferenciável da unidade* é uma família $(f_i)_{i \in I}$ de funções diferenciáveis $f_i : X \to \mathbb{R}$ tal que:

1. Para todo $i \in I$, $f_i \geq 0$ e o suporte $\text{Supp}(f_i)$ é contido no domínio U_i de uma carta diferenciável de X; [2]

[2] Uma família de abertos $(U_i)_{i \in I}$ tal que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ é *localmente finita* se todo ponto $p \in X$ possui uma vizinhança V tal que $V \cap U_i \neq \emptyset$ apenas para um número finito de indíces.

2. A família $(U_i)_{i\in I}$ é localmente finita;
3. $\sum_{i\in I} f_i(p) = 1$ para todo $p \in X$. [3]

[3] Essa soma tem um número finito de termos diferentes de 0.

A esfera de Riemann

O primeiro examplo de superfície de Riemann é a *esfera de Riemann*. No espaço $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, t) podemos considerar a esfera unitária S^2,

$$x^2 + y^2 + t^2 = 1.$$

Seja $N = (0, 0, 1)$ o polo Norte da esfera e $S = (0, 0, -1)$ o polo Sul.

A projeção estereográfica associada à N associa a cada ponto $M \in S^2 - N$ a interseção da reta (NM) com o plano $t = 0$. A coordenada complexa deste ponto é

$$z = \frac{x + iy}{1 - t}.$$

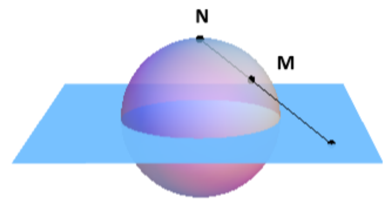

Figura 3: Projeção estereográfica associada à N.

Assim a aplicação $(x, y, t) \mapsto z$ é um homeomorfismo de $S^2 - N$ sobre $\mathbb{C}$, isto é uma carta holomorfa.

Podemos também definir uma outra carta holomorfa $S^2 - S$ sobre $\mathbb{C}$: a composta da projeção estereográfica associada a S com depois a conjugação complexa (i.e $z \mapsto \bar{z}$). O resultado é

$$w = \frac{x - iy}{1 + u}.$$

Uma observação importante é que $z.w = 1$.

A esfera S^2 com este atlas holomorfo é chamada *esfera de Riemann*, denotada por $\widehat{\mathbb{C}}$.

Funções holomorfas em $\widehat{\mathbb{C}}$. Seja $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ um conjunto aberto. Uma função f é *holomorfa* em U se: para todo ponto $M \neq N$ f pode ser escrita numa vizinhança de M distinta de N como uma função holomorfa em z, e para todo ponto $M \neq S$, f pode ser escrita numa vizinhança de M distinta de S como uma função de w. Para um aberto $U \subset \widehat{\mathbb{C}} - \{N, S\}$, uma função holomorfa em z é também holomorfa em w (lembra da relação: $z.w = 1$).

A esfera de Riemann pode ser vista como uma *compactificação* [4]do plano complexo $\mathbb{C}$, i.e como o resultado de acrescentar um ponto ∞ no plano. Conjuntos do tipo $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| > R\} \cup \{\infty\}$ formam uma base de vizinhanças de ∞, e uma função f definida em U é holomorfa perto de ∞ se e somente se

$$w \mapsto \frac{1}{f(1/w)}$$

é holomorfa perto de $w = 0$.

[4] Um mergulho $f : X \to Y$ com imagem densa e Y **compactificação** $\overline{X}$ de um espaço topológico X é um mergulho tal que $f(X)$ é denso em $\overline{X}$.

Extensão de um polinômio complexo na esfera de Riemann. Seja $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio complexo. Então P tem uma extensão $\widetilde{P} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ na esfera de Riemann, dada por $P : \infty \mapsto \infty$ (isto é, o infinito é u *ponto fixo* de $\widehat{P}$). Para simplificar, o seguinte lema considera somente um polinômio de grau 2.

Lema 1. *Seja $P_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio quadrático dado pela formula*

$$P_c(z) = z^2 + c.$$

Então existe uma extensão $\widehat{P_c} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ de P_c na esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que o ponto $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ é um **super-atrator**.

Um ponto fixo x_0 de uma aplicação holomorfa definida perto de x_0 é um *super-atrator* se $f'(x_0) = 0$.

Demonstração. A mudança de variável $w = \frac{1}{z}$ manda ∞ até 0:

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r] \arrow[d] & z = \frac{1}{w} \arrow[d] \\ \frac{w^2}{1+cw^2} & z^2 + c = \frac{1}{w^2} + c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Com essa nova variável, a aplicação é agora dada por :

$$w \mapsto \frac{w^2}{1+cw^2} = w^2(1 - cw^2 + \ldots) = w^2 - cw^4 + \ldots$$

Nessa expansão não tem um termo de grau 1, então $w = 0$ é um super-atrator. □

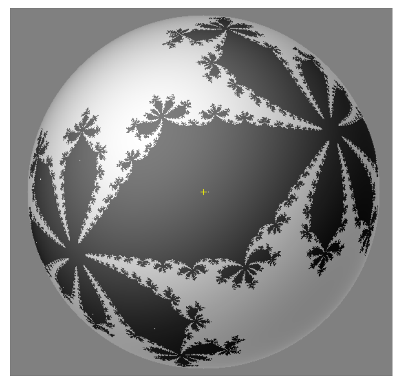

Figura 4: Polinômio na esfera de Riemann, com a bacia de atração do infinito em cinza.

Agora é fácil ver que a bacia do ponto ∞ contem um disco aberto $D(\infty, R)$ de raio $R > 0$:

Lema 2. *Seja $P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \ldots + a_0$. Então existe um $R > 0$ tal que $|z| > R \implies z_n \to \infty$.*

Demonstração. Simplesmente temos que

$$P(z) = z^d \left(1 + \frac{a_{d-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_0}{z^d}\right),$$

então $|P(z)| \geq |z|^d.\frac{1}{2} > K.|z|$ para um $K > 1$ e z grande. Por indução temos $|P^{\circ n}(z)| \geq K^n.|z|$ e o resultado é uma consequência imediata. A condição $a_{d-1} = 0$ pode ser sempre obtida depois de uma conjugação com uma função linear. □

Teorema 1. *Seja $P(z)$ um polinômio de grau $k \geq 2$. Então para R suficientemente grande, existe uma aplicação*

$$\phi : \{|z| > R\} \to \mathbb{C},$$

biholomorfa de $V := \{|z| > R\}$ até $\phi(V)$ tal que $\phi(P(z)) = (\phi(z))^k$. Essa aplicação é única a menos de uma multiplicação por uma raiz $(k-1)-$ésima da unidade.

Demonstração. É facil ver que para R grande temos que $P(V) \subset V$ e que $\psi(z) := \log \frac{P(z)}{z^k}$ é bem definida e limitada em V. Podemos então escrever $P(z)$ como $P(z) = z^k . \exp \psi(z)$. Por indução temos que

$$P^n(z) = z^{k^n} . \exp\left(k^{n-1}\psi(z) + \ldots + \psi(P^{n-1}(z))\right).$$

Assim podemos definir um "ramo de $\sqrt[k^n]{P^n(z)}$", simplesmente como

$$\phi_n(z) := z. \exp\left(\frac{1}{k}\psi(z) + \ldots + \frac{1}{k^n}\psi(P^{n-1}(z))\right).$$

Agora ψ é limitada em V então $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^j}\psi(P^{j-1}(z))$ converge uniformemente em V, então ϕ_n também converge uniformemente para um limite ϕ analítica em V. A equação funcional $\phi \circ P = \phi^k$ é consequência da seguinte equação, fácil de verificar:

$$\phi_n(P(z)) = (\phi_{n+1}(z))^k.$$

$\square$

Essa nova coordenada $w = \phi(z)$ é chamada **coordenada de Böttcher** perto do infinito, e é fundamental no assunto da dinâmica holomorfa.

Funções meromorfas

Definição 2. *Uma função meromorfa numa variedade complexa X é uma função $f : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ holomorfa.*

Funções meromorfas na esfera de Riemann

Teorema 2. *Cada função meromorfa na esfera de Riemann é uma fração racional.*

Demonstração. Seja f uma função meromorfa em $\widehat{\mathbb{C}}$. Podemos supor que ∞ não é um pólo de f (se não, podemos considerar $\frac{1}{f}$).Assim, f é limitada perto do infinito.Para cada pólo finito $a \neq \infty$ de f podemos escrever localmente

A expressão $\sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ é chamada a *parte polar* de f no pólo finito a.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{(z-a)^k} + h(z), \text{ com } h \text{ holomorfa perto de } a.$$

Sejam $a_1, \ldots a_n$ os pólos de f, então a função $g = f - \sum(\text{partes polares})$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ e limitada, então é constante (teorema de Liouville). $\square$

Lembra que f é limitada perto do infinito,num disco $\mathbb{D}(\infty, r)$.

Automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$

Teorema 3. *Cada automorfismo de $\widehat{\mathbb{C}}$ é uma função de Möbius $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc \neq 0$.*

Demonstração. O automorfismo f pode ser escrito como $f = \frac{P}{Q}$ (P e Q sem raiz comum). Agora P não tem mais de um zero (simples), então P é de grau 0 ou 1. O mesmo é verdadeiro para Q. Assim f pode ser escrito como $\frac{az+b}{cz+d}$. Necessariamente, $ad - bc \neq 0$ (se não f é constante). □

Proposição 1. *Seja X ume superfície de Riemann. Então o conjunto $\mathcal{M}(X)$ das funções meromorfas em X é um corpo.*

Uma função f meromorfa, diferente de zero, tem zeros que são isolados, então $1/f$ é meromorfa também.

Funções analíticas entre superfícies de Riemann

Lema de Weyl

O problema de Dirichlet

Definição 3. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto, uma função $u : U \to \mathbb{R}$ é dita* **harmônica** *se:*

u é de classe C^2 e $\Delta u = 0$, onde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Definição 4. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto, uma função $u : U \to \mathbb{R}$ é dita* **harmônica** *se:*

para todo disco $\overline{D}(z,r) \subset U$, $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta$.

Lema 3. *Se $u : D \to \mathbb{R}$ é harmônica num disco $D \subset \mathbb{C}$, então existe uma função holomorfa $f : D \to \mathbb{C}$ tal que $u = Re(f)$.*

Demonstração. Queremos uma função v tal que $u + iv : D \to \mathbb{C}$ seja holomorfa, i.e queremos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \text{ e também } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

(equações de Cauchy-Riemann). Utilizando a fórmula de Stokes, a forma diferencial $Pdx + Qdy$ é exata (i.e $= df$) se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

isto é:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\right)$$

mas isso é uma consequência imediata de $\Delta u = 0$. □

Lema 4. *Seja $u : U \to \mathbb{R}$ uma função definida num aberto U de $\mathbb{C}$ e tal que para todo $z \in U$, existe um disco $D(z,r) \subset U$ e uma função holomorfa f com $u = \operatorname{Re} f$. Então u é harmônica em U.*

Demonstração. Consequência imediata das equações de Cauchy-Riemann:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

□

E facil ver que uma função harmônica tem que ser de classe C^∞.

Se $u = \operatorname{Re}(f)$, com f holomorfa, já sabemos que f é C^∞ e então u também.

Proposição 2. *Seja $u : U$ aberto $\to \mathbb{R}$ harmônica, com $\overline{D}(z,r) \subset U$, então:*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta.$$

Demonstração. Num disco maior $D(z,s) \subset U$, $s > r$, a função u pode ser escrita como $u = \operatorname{Re} f$ onde $f = u + iv$ é holomorfa. A fórmula de Cauchy implica:

$$(u+iv)(z) = f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\zeta}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{i\theta})}{z + re^{i\theta} - z} ire^{i\theta}d\theta.$$

Tomando as partes reais dessa equação dá o resultado. □

Princípio do máximo para funções analíticas e harmônicas

Teorema 4 (Comportamento local das aplicações holomorfas)**.** *Sejam X e X' duas superfícies de Riemann e $f : X \to X'$ uma aplicação holomorfa não constante. Seja $a \in X$ e $a' = f(a)$. Então existe um inteiro $k \geq 1$ que depende de a e duas cartas holomorfas $\phi : U \to V$ em X e $\phi' : U' \to V'$ em Y tais que:*

1. *$a \in U$ com $\phi(a) = 0$ e $a' \in U'$ com $\phi'(a') = 0$;*
2. *$f(U) \subset U'$ e o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} U \subset X & \xrightarrow{f} & U' \subset X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & V' \end{array}$$

3. *$\phi' \circ f \circ \phi(z) = z^k$, para cada $z \in V$.*

Uma consequência imediata é que as funções holomorfas são **abertas**.

Lembra que f é **aberta** significa

$$f(\text{aberto}) = \text{aberto}.$$

Também f holomorfa satisfaz o príncipio do máximo: se f é holomorfa, não constante num aberto conexo U, então $|f|$ não tem um máximo em U.

Proposição 3. *Uma função harmônica u satisfaz o princípio do máximo: num aberto conexo, ou u é constante, ou u não tem um máximo.*

Demonstração. u harmônica $\Longrightarrow$ localmente $u = \mathrm{Re}(f)$, f holomorfa. Suponhamos que u tem um máximo em z_0 e u não constante. Então f é aberta e existe z perto de z_0 tal que $\mathrm{Re}\, f(z) > Ref(z_0)$, uma contradição. □

Núcleo de Poisson

Sejam $\zeta, z \in \mathbb{C}$, então o núcleo de Poisson no disco $\mathbb{D}$ de raio 1 é

$$P(z,\zeta) := \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|z-\zeta|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right).$$

A seguinte observação (consequência do teorema do resíduo)vai ser útil :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, z)d\theta = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}\right) = 1.$$

Seja $f(\theta), \theta \in \mathbb{R}$ uma função contínua 2π-périodica. O **problema de Dirichlet** para o disco $D(0,r)$ é de encontrar uma função F contínua no disco fechado $\overline{D}(0,r)$, harmônica no disco aberto $|z| < r$ e tal que no bordo:

$$F(re^{i\theta}) = f(\theta).$$

Teorema 5. *O problema de Dirichlet para um disco possui uma única solução.*

Demonstração. **Unicidade da solução.**

Sejam u_1 e u_2 duas soluções. Então $u_1 - u_2$ é contínua no disco fechado, harmônica no interior e zero no bordo. O princípio do máximo mostra que $u_1 - u_2$ tem que ser zero no disco inteiro.

Existência da solução. Para cada $|z| < r$, seja

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)P(re^{i\theta}, z)d\theta.$$

Vamos mostrar que F é harmônica e que

$$f(\theta) = \lim_{z\to re^{i\theta}} F(z).$$

F é harmônica, porque ela é a parte real da seguinte função holomorfa em $|z| < r$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}d\theta.$$

Para ver que essa função é holomorfa, podemos derivar a função sob o sinal de integral.

Lema 5. *A integral*

$$I := \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|>\eta} \frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta$$

converge para 0 *quando* $z \to re^{i\theta_0}$ *com* $|z| < r$.

Demonstração do lema. Seja $z = \rho e^{i\alpha}$. Se $|\alpha-\theta_0| \leq \frac{\eta}{2}$, temos

$$|\alpha-\theta| \geq \frac{\eta}{2}$$

para todo θ tal que $|\theta-\theta_0| \geq \frac{\eta}{2}$. Isso implica

$$|re^{i\theta}-z| \geq r\mathrm{sen}\frac{\eta}{2},$$

e então a integral I é menor que $\frac{r^2-\rho^2}{r^2\mathrm{sen}^2\frac{\eta}{2}}$ que converge para zero quando $\rho \to r$. □

Agora vamos mostrar

$$\lim_{\substack{z\to re^{i\theta_0}\\ |z|<r}} F(z) = f(\theta_0).$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} F(z)-f(\theta_0) = &\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|\leq\eta}(f(\theta)-f(\theta_0))\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|>\eta}(f(\theta)-f(\theta_0))\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta \end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$. A primeira integral é menor que $\sup_{|\theta-\theta_0|\leq\eta}|f(\theta)-f(\theta_0)|$. A continuidade de f implica que podemos escolher η tal que a primeira integral seja menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Com essa escolha de η, um majorante da segunda integral é

Lembra que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta = 1$$

$$2.\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|f(\theta)|.\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|>\eta}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta \to 0, \text{ quando } z \to re^{i\theta_0},$$

isto é, para z suficientemente perto de $re^{i\theta_0}$, essa segunda integral será $\leq \frac{\epsilon}{2}$ e então

$$|F(z)-f(\theta_0)| \leq \epsilon,$$

que mostra o resultado. □

Sequências de funções harmônicas e convergência

Proposição 4. *Seja* $u_n : D(0,R) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *uma sequência de funções harmônicas que converge uniformemente sobre compactos para uma função* $u : D(0,R) \to \mathbb{R}$. *Então* u *é harmônica também.*

Demonstração. Para todo $r < R$, no disco $|z| < r$ temos

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})u_n(re^{i\theta})d\theta.$$

Pela convergência uniforme de u_n no bordo $\partial D(0, r)$ temos que a mesma fórmula fica valida para u, mas isso significa que u é harmônica. □

Teorema 6. *Seja $M \in \mathbb{R}$ e*

$$u_0 \leq u_1 \ldots \leq M$$

uma sequência de funções harmônicas $u_n : D(0, R) \to \mathbb{R}$. Então essa sequência converge uniformemente sobre compactos para uma função harmônica $u : D(0, R) \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja K um compacto de $D(0, R)$. Então existe $\rho < r < R$ tais que $K \subset \{|z| \leq \rho\}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\epsilon' := \epsilon\frac{r-\rho}{r+\rho}$. A sequência $u_n(0)$ é crescente e limitada então existe N tal que

$$n \geq m \geq N \implies u_n(0) - u_m(0) \leq \epsilon'.$$

Agora podemos observar que para $|z| \leq \rho$ temos

$$0 \leq P(z, re^{i\theta}) \leq \frac{r + |z|}{r - |z|} \leq \frac{r + \rho}{r - \rho},$$

então a aplicação da fórmula de Poisson para a função $u_n - u_m$ dá, para todo $z \in K$:

$$\begin{aligned} u_n(z) - u_m(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, e^{i\theta})(u_n(re^{i\theta}) - u_m(re^{i\theta}))d\theta \\ &\leq \frac{r+\rho}{r-\rho}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_n(re^{i\theta}) - u_m(re^{i\theta}))d\theta \\ &\leq \frac{r+\rho}{r-\rho}(u_n(0) - u_m(0)) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre K e o limite é uma função harmônica. □

Isto é uma conseqüência da proposição sobre a convergência uniforme das funções harmônicas.

Funções subharmônicas

Um domínio é um aberto conexo de X

Definição 5. *Seja X uma superfície de Riemann. Uma função contínua $u : X \to \mathbb{R}$ é* **subharmônica** *se para todo domínio D de X e toda função $v : D \to \mathbb{R}$ harmônica, a diferença $u - v$ é constante, ou sem máximo.*

Modificação harmônica. Seja D um *disco analítico* de X (i.e a pre-imagem $\phi^{-1}(D)$ de um disco $D \subset \mathbb{C}$ por uma carta holomorfa ϕ). Para cada função contínua $u : X \to \mathbb{R}$ podemos definir a modificação harmônica em D de u como a única função u_D contínua em X, igual a u em $X - D$ e harmônica em D.

Proposição 5. *Seja $u : X \to \mathbb{R}$ contínua. As seguintes proposições são equivalentes:*

1. *u é sub-harmônica.*
2. *para todo disco analítico D, $u \leq u_D$.*
3. *para todo disco analítico D, $u \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} u$.*

Demonstração. $1 \implies 2$ A função $u - u_D$ é zero em $X - D$ e subharmônica em D, então ela é ou constante (e essa constante só pode ser zero) ou sem máximo em D (mas isso implica que a função é ≤ 0).

$2 \implies 3$ Temos $u(0) \leq u_D(0)$ que é a média de u_D no bordo do disco, mas essa média é também a média de u no bordo do disco (porque $u = u_D$ em ∂D).

$3 \implies 1$ Seja v harmônica num domínio D tal que $u - v$ tem um máximo M em D. O conjunto $D_M := \{P \in D; u(P) - v(P) = M\}$ é fechado, não vazio. E suficiente mostrar que ele é aberto também para concluir, porque D é conexo. Seja $P \in D_M$ e $D_r \subset D$ um disco analítico com centro em P, então

$$M = (u - v)(P) \leq \text{ média de } (u - v) \text{ no bordo} \leq M,$$

então $u - v = M$ no bordo (e então numa vizinhança de P).

Aqui podemos mudar o valor de $r > 0$.

□

Proposição 6 (Perron). *Seja $\mathcal{F}$ uma família $\neq \emptyset$ de funções sub-harmônicas em X tal que*

a) para cada disco analítico D, $u \in \mathcal{F} \implies u_D \in \mathcal{F}$,

b) se $u, v \in \mathcal{F}$, então existe $w \in \mathcal{F}$ tal que $w \geq \max(u, v)$ em X.

Então, se a função $u^\star := \sup_{\mathcal{F}} u$ é finita em cada ponto, ela é harmônica.

Demonstração. Podemos trabalhar localmente num disco analítico D. Seja $x_0 \in D$. Podemos escrever $u^\star(x_0) = \lim u_n(x_0)$ com $u_n \in \mathcal{F}$. Também podemos supor que a sequência u_n é crescente (se não, introduzir $u'_n \geq \max_{i \leq n} u_i$) e que as funções u_n são harmônicas (se não utilizar $u''_n := u'_{n,D}$). Nessa situação o teorema de Harnack implica a existência de um limite u harmônica. Vamos mostrar que $u^\star = u$. Seja x qualquer ponto de D. Da mesma maneira podemos escrever $u^\star(x)$ como um limite $\lim v_n(x)$ com $v_n \in \mathcal{F}$. Também o teorema de Harnack implica a existência de um limite harmônica v. Podemos também supor $v_n \geq u_n$, então $u \leq v \leq u^\star$. Mas agora $u - v$ é harmônica em D, é ≤ 0 em $\overline{D}$ e zero em x_0. O princípio do máximo implica que $u - v = 0$ em $\overline{D}$ e então $u = v = u^\star$. □

O objetivo vai ser agora de obter a solução do problema de Dirichlet geral como um supremo de uma família de funções sub-harmônicas. Seja Y um aberto de uma superfície de Riemann X e $f : \partial Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua limitada. Vamos denotar por $\mathcal{F}_f$ a família de funções

$$\mathcal{F}_f := \{u : \overline{Y} \to \mathbb{R} \text{ contínua e } u \leq \sup_{\partial Y} f,\ \text{sub-harmônica em } Y, \leq f \text{ em } \partial Y\},$$

e $u_f = \sup_{\mathcal{F}_f} u$ em Y. Podemos observar que u_f é harmônica. A função u_f só tem uma extensão contínua até $\overline{Y}$ se a fronteira ∂Y é suficientemente regular:

Definição 6. *Um ponto $x \in \partial Y$ é chamado* **regular** *se existe uma vizinhança aberta U de x e uma função β (chamada* **barreira***) contínua em $\overline{Y} \cap U$ e tal que:*

1. *β é sub-harmônica em $Y \cap U$,*
2. *$\beta(x) = 0$ e $\beta(y) < 0$ para todo $y \in (\overline{Y} \cap U) - \{x\}$.*

A existência de uma barreira num ponto x é um problema local. Nos precisamos um critério simples para definir barreiras:

Teorema 7. *Seja Y um aberto de $\mathbb{C}$ e $a \in \partial Y$. Suponhamos que tem um disco*

$$D := \{z \in \mathbb{C}; |z - m| < r\}, \text{ onde } m \in \mathbb{C}, r > 0,$$

tal que $a \in \partial D$ e $D \cap Y = \emptyset$. Então a é um ponto regular do bordo de Y.

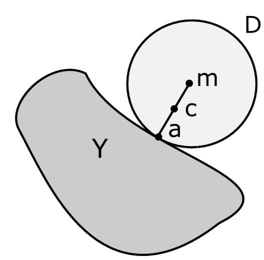

Figura 5: A condição do "disco exterior"para existência de barreira.

Demonstração. Podemos escolher $c = (a + m)/2$. Então,

$$\beta(z) := \log \frac{r}{2} - \log |z - c|$$

defina uma barreira no ponto a. Isto é, a é um ponto regular. □

Lema 6. *Sejam $m, c \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq c$. Seja $x \in \partial Y$ um ponto regular e V uma vizinhança de x. Então existe uma função $v : \overline{Y} \to \mathbb{R}$ contínua com as seguintes propriedades:*

(i) a restrição $v_{|Y}$ é sub-harmônica,

(ii) $v(x) = c$, e a restrição de v em $\overline{Y} \cap V$ é $\leq c$,

(iii) a restrição de v em $\overline{Y} - V$ é $= m$.

Demonstração. Podemos supor $c = 0$. Seja U uma vizinhança aberta de x e $\beta : \overline{Y} \cap U \to \mathbb{R}$ uma barreira em x. Podemos reduzir V e supor que o fecho $\overline{V}$ seja um compacto de U. Então

$$\sup\{\beta(y); y \in \partial V \cap \overline{Y}\} < 0.$$

Então existe uma constante $k > 0$ tal que

A função β é < 0 no compacto $\partial V \cap \overline{Y}$.

$$k\beta_{|\partial V \cap \overline{Y}} < m.$$

Vamos definir agora

$$v := \begin{cases} \max(m, k\beta) & \text{em } \overline{Y} \cap V \\ m & \text{em } \overline{Y} - V. \end{cases}$$

Então essa função v é contínua em $\overline{Y}$ e sub-harmônica em Y e satisfaz as condições (ii) e (iii).

□

O seguinte lema mostra porque pontos regulares são importantes:

Lema 7. *Seja f contínua e limitada no bordo de um aberto Y de X.Se x é regular, então $\lim_{y \to x} u_f(y) = f(x)$.*

Demonstração. A função f é contínua e limitada em ∂Y, então $k \leq f(x) \leq K$. Seja $\epsilon > 0$ e $x \in \partial Y$. A continuidade de f implica

$$f(x) - \epsilon \leq f(y) \leq f(x) + \epsilon,$$

para todo $y \in \partial Y \cap V$, onde V é uma vizinhança de x.Podemos aplicar o lema com $m = k - \epsilon$, $c = f(x) - \epsilon$ e obter assim uma função $v \in \mathcal{F}$ tal que:

1. v é sub-harmônica,
2. $v(x) = f(x) - \epsilon$ e $v \leq f(x) - \epsilon$ em $\overline{Y} \cap V$,
3. v é igual a $k - \epsilon$ em $\overline{Y} - V$.

Em particular $v \in \mathcal{F}_f$ (e então $v \leq u_f$). Isso implica

$$\liminf_{y \to x} u_f(y) \geq v(x) = f(x) - \epsilon.$$

Seja $Y \subset X$ e $a \in \overline{Y}$ então $\liminf_{y \to x} := \lim_{\epsilon \to 0}(\inf\{f(t) : t \in Y \cap D(x,\epsilon) - \{x\}\})$.

Da mesma maneira, utilizando o mesmo lema podemos encontrar uma função contínua $w : \overline{Y} \to \mathbb{R}$, sub-harmônica em Y e tal que: [5]

[5] Aplicar o lema com $-K = m \leq c = -f(x)$

1. $w(x) = -f(x)$
2. $w_{|\overline{Y} \cap V} \leq -f(x)$

3. $w_{|\overline{Y}-V} = -K$.

Para qualquer função $u \in \mathcal{F}_f$ e $y \in \partial Y \cap V$ temos que $u(y) \leq f(x) + \epsilon$. Então $u(y) + w(y) \leq \epsilon$ para todo $y \in \partial Y \cap V$.

Também temos

$$u(z) + w(z) \leq K - K = 0 \text{ para todo } z \in \overline{Y} \cap \partial V.$$

Agora a função $u + w$ é sub-harmônica em $Y \cap V$ então podemos aplicar o principio do máximo e obter

$$u + w \leq \epsilon \text{ em } \overline{Y} \cap V.$$

Assim para qualquer função $u \in \mathcal{F}_f$ temos

$$u_{|\overline{Y} \cap V} \leq \epsilon - w_{|\overline{Y} \cap V},$$

e isso implica

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} u_f(y) \leq \epsilon - w(x) = f(x) + \epsilon.$$

□

A demonstração acima utilizou

Lema 8. *Seja $u : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua e sub-harmônica que tem um máximo no domínio D, então u é constante.*

Demonstração. Seja $S := \sup(u(z); z \in D)$ e $A = u^{-1}(S)$. A é fechado (porque u é contínua). Vamos mostrar que A é aberto também. Seja $z_0 \in A$ e $\phi : U \to V$ uma carta holomorfa com $\phi(z_0) = 0$. Então $v = u \circ \phi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ é contínua, sub-harmônica com um máximo S no ponto 0. Seja $r > 0$ tal que $D(0, r) \subset \{z; |z| \leq r\} \subset V$:

Assim, como o domínio é conexo, A aberto e fechado $\implies A = \emptyset$ ou $A = D$.

$$S = v(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S d\theta = S.$$

Isso implica, pela continuidade de v, que $v(re^{i\theta}) = S$ para todo θ. Assim v é constante numa vizinhança de 0.

□

O seguinte teorema é agora uma conseqüência imediata.

Teorema 8. *Seja Y um aberto de uma superfície de Riemann X tal que todos os pontos de ∂Y sejam regulares. Então para cada função contínua limitada $f : \partial Y \to \mathbb{R}$ o problema de Dirichlet pode ser resolvido.*

Funções de Green e superfícies hiperbólicas

Definição 7. *Uma superfície de Riemann X é dita elíptica se ela é compacta, hiperbólica se existe uma função $u < 0$ sub-harmônica e não constante em X, e parabólica nos outros casos.*

Observe que uma superfície elíptica não pode ser compacta por causa do principio do máximo.

Lema 9. *Seja X uma superfície de Riemann hiperbólica, D um domínio com bordo* **regular** *em X, com complemento K compacto não vazio. Então existe uma função contínua $\omega : \overline{D} \to \mathbb{R}$ tal que*

1. $\omega = 1$ *em* ∂D;
2. ω *é harmônica e satisfaz* $0 < \omega < 1$.

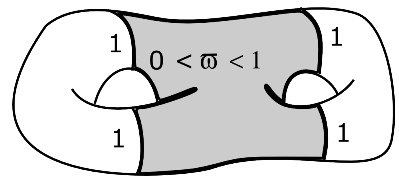

Figura 6: A função harmônica ω.

Demonstração. X é hiperbólica então existe $u > 0$ super-harmônica não constante em X. Podemos supor $\min_K u = 1$. A função u não tem um minimo em X então existe $P \in D$ tal que $u(P) < 1$. Podemos trocar u com $\min(1, u)$ e assim supor $u = 1$ em K. Seja

u super-harmônica $\Leftrightarrow -u$ sub-harmônica

$$\mathcal{F} := \{v \text{ contínua em } \overline{D},\ \text{sub-harmônica e} \leq u \text{ em } D\}.$$

Então $\mathcal{F}$ é uma família de Perron.[6] Isso significa que $\omega := \sup_{\mathcal{F}} v$ é harmônica.

[6] Para todo disco Δ e $v \in \mathcal{F}$ então $u - v_\Delta = u - v \geq 0$ em $\partial\Delta$ e sub-harmônica então $v_\Delta \in \mathcal{F}$.

Vamos mostrar que essa função ω é a solução do problema. Seja então $K \subset D' \subset X$ um domínio com bordo regular e com fecho compacto. Seja v uma solução do problema de Dirichlet tal que

$$v := \begin{cases} 1 & \text{em } \partial K \\ 0 & \text{em } \partial D' \end{cases}$$

estendida por zero fora de D'. Então $v - u$ é sub-harmônica e ≤ 0 fora de D' então também ≤ 0 em $\overline{D'}$ (o máximo dela acontece no bordo). Assim, $v \in \mathcal{F}$ e isso implica $v \leq \omega \leq u$. Agora ω é contínua em $\overline{D}$, $0 \leq \omega \leq 1$ em $\overline{D}$, $\omega \equiv 1$ em ∂K, ω não é constante (porque $\omega(P) < 1$) então não tem máximo nem mínimo em D: isso implica $0 < \omega < 1$ em D.

□

Definição 8. *Uma* **função de Green** *num ponto P de X é uma função g harmônica e $>\ 0$ em $X - \{P\}$ tal que $g(z) + \log|z|$ seja harmônica perto de P numa carta holomorfa z em P,e minimal (no sentido que $g' \geq g$ para outra função candidata). Em particular se g existe, ela é única.*

Teorema 9. *X é hiperbólica se e somente se existe uma função de Green num ponto (ou em qualquer ponto) de X.*