

# MAT 0320 Lista 2

Prof. Sylvain Bonnot

## 1 Conjuntos abertos, fechados

**Exercício 1.** Mostre que  $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$  é aberto.

**Exercício 2.** Mostre que o disco fechado  $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$  é fechado.

## 2 Limites

**Exercício 3.** Prove que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  implica que  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |L|$ .

**Exercício 4.** Mostre:  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{6z+2}{2z-3} = 3$ .

**Exercício 5.** Calcule:  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{6z+2}{2z-3} = 3$ .

**Exercício 6.** Calcule:  $\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i}$ .

**Exercício 7.** Prove que  $f(z) = 1/z$  é contínua em todo  $z \neq 0$ .

## 3 Derivadas, equações de Cauchy-Riemann

**Exercício 8.** Utilize as equações de Cauchy-Riemann para verificar, no caso de cada uma das funções dadas, qual é holomorfa e em que domínio. Em caso positivo, determine a derivada  $f'(z)$ :

a)  $w = z^3$

b)  $w = \overline{(e^z)}$

c)  $w = \bar{z}$

d)  $w = 1/z$

e)  $w = e^{-y}(\cos x + i \sen x)$

**Exercício 9.** Mostre que  $f'(z)$  não existe para as seguintes funções:

a)  $z - \bar{z}$

b)  $2x + xy^2i$

c)  $e^x(\cos y - i \sen y)$

**Exercício 10.** Mostre que a seguinte função é holomorfa em  $\mathbb{C}$ :

$$f(z) = 3x + y + i(3y - x)$$

**Exercício 11.** Prove que  $\exp(\bar{z})$  não é holomorfa em nenhum ponto.

## 4 Função exponencial $e^z = \exp(z)$

**Exercício 12.** Determine todos os valores de  $z$  tais que:

a)  $e^z = -2$

b)  $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

c)  $e^{2z-1} = 1$

**Exercício 13.** Mostre que  $\exp(i\bar{z}) \neq \overline{\exp(iz)}$  a menos que  $z = \pm n\pi$ ,  $n = 0, 1, \dots$

**Exercício 14.** Mostre que  $|\exp(-2z)| < 1$  se e somente se  $\operatorname{Re}(z) > 0$

**Exercício 15.** Examine o comportamento de:

a)  $\exp(x + iy)$  quando  $x \rightarrow -\infty$

b)  $\exp(2 + iy)$  quando  $y \rightarrow \infty$ .