MAT 0320 Lista 1

Prof. Sylvain Bonnot

Exercício 1. Coloque os números complexos na forma $a+bi$:

a) $\frac{1}{2+3i}$

b) $\frac{1+i}{3+2i}$

c) $(1+i)^3$

d) $(2+3i)^2$

Exercício 2. Coloque os números complexos na forma polar:

a) $1+i\sqrt{2}$

b) $4i$

c) $1+i$

d) -5

Exercício 3. Represente graficamente os conjuntos de complexos que satisfazem a condição dada:

1. $z.\bar{z}=1$
2. $z+\bar{z}+2=0$
3. $|z|=|z-1|$
4. $z+\bar{z}+2i=0$

Exercício 4. Seja $\lambda>0$ com $\lambda\neq 1$. Mostre que o conjunto dos pontos $z\in\mathbb{C}$ tais que $|z|=\lambda|z-1|$ é um círculo.

Exercício 5. Utilizando a identidade de De Moivre, calcule:

a) As raízes quadradas de $1+\sqrt{3}\,i$, $\sqrt{3}-i$ e $1+i$.

b) As raízes cúbicas de $1-i$ e de i.

Exercício 6. Calcule as partes real e imaginária de $(1+i)^{100}$.

Exercício 7. Mostre que para todo número natural n e todo complexo $z\neq 1$ vale a identidade:

$$1+z+z^2+....+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Exercício 8. Utilizando o exercício anterior e tomando as partes reais de ambos os membros, verifique que a identidade

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+...+\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\theta}{2}\right]}\right)$$

é valida para todo natural n e todo $0 < \theta < 2\pi$.

Exercício 9. Seja n um número natural e seja $\zeta = e^{2\pi i/n}$, mostre que para todo número complexo z temos:

$$z^n - 1 = (z-\zeta)(z-\zeta^2)\ldots(z-\zeta^n)$$

Exercício 10. Sejam z_1, z_2 números complexos. Prove que

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

e interprete o resultado geometricamente.