MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 8/ Segunda 17/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 7

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`

Definição

A frase $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *significa:*
para todo número $\epsilon > 0$ *há um número correspondente* $\delta > 0$ *tal que*

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

2. **Continuidade de f em a:** $a \in Dom(f)$, $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e é igual a $f(a)$. Isto é, eu posso substituir e fazer $x = a$.
3. **Continuidade de f num intervalo I:** $\Leftrightarrow f$ é continua em cada ponto x do intervalo I.
4. **Leis de continuidade :** Se f, g são continuas, então $f + g, f - g, f.g$ são continuas.Também f/g, se $g(a) \neq 0$.
5. **Alguns metodos:** fatorar, simplificar, rationalizar (exemplo do tipo $\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}$), e derivada (cada vez que aparece um quociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pensar "derivada")

Exercício

Calcule o limite se existir (fazer so 23, 26):

23. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t} \right)$

27. $\lim_{x \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t} \right)$

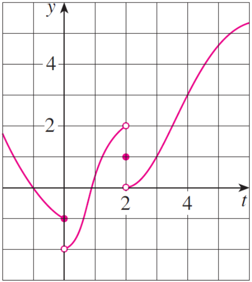
30. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

Limites laterais: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Lido como: "o limite esquerdo de $f(x)$ quando x tende a a. Também: o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda.



Exercício

Escrever a definição do limite esquerdo e direito.

Observação

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Limites laterais: exemplos

Exercício

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ *onde* $f(x) = x^2$ *se* $x \leq 1$, $e = 2x - 1$ *se* $x > 1$.

Exercício

$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$.

Exercício

A afirmação seguinte é verdadeira ou falsa?
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow f$ *continua.*

Limites e desigualdades

Teorema

Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está proximo de a (exceto possivelmente em a), e os limites de f e g existem quando x tende a a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Desigualdade estrita: cuidado, podemos ter $f(x) < g(x)$ mas $L_1 = L_2$!

Teorema (do Confronto, ou Teorema do Sanduíche)

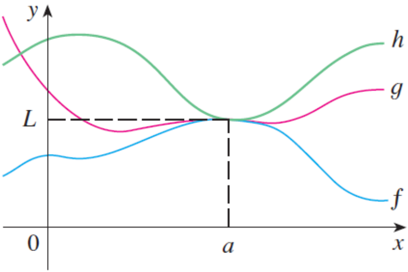
Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está proximo de a (exceto possivelmente em a), e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

enão:

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Limites e desigualdades II:



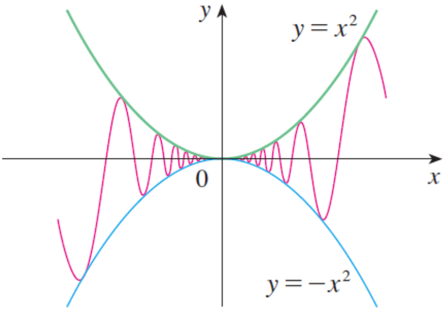
Exercício

Mostrar $\lim_{x \to 0} x^2 . \cos^{17}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

Exercício

Mostrar $\lim_{x \to 0} x^2 . g(x) = 0$, *onde* $g(x)$ *é qualquer função limitada.*

Limites e desigualdades III: Teorema do Sanduíche



Exercício

Mostrar $\lim_{x \to 0} x^2 . \cos(\frac{1}{x}) = 0.$

Exercício

1. $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ *não existe.*
2. *Mostrar* $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0.$

Limites e funções compostas

Teorema

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. Se $\lim_{x \to p} f(x) = a$ e g contínua em a, então:

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u).$$

Teorema (Caso mais utilizado)

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. Se f for contínua em p e g contínua em $f(p)$, então a composta $h(x) = g(f(x))$ será contínua em p

Exercício

Calcule

1. $\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}$
2. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$ *(pode rationalizar ou fazer uma "mudança de variavel")*

Limites e funções compostas: "mudança de variavel"

Situação: suponhamos g contínua em a, e

$$\boxed{g(u) \xrightarrow[u\to a]{} g(a) \text{ e também } f(x) \xrightarrow[x\to p]{} a}$$

então

$$\boxed{F(x) = g(f(x)) \xrightarrow[x\to p]{} g(a)}$$

Exercício

Seja f definida em $\mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. *Calcule*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{f(3x)}{x}$.
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$

Limites e funções trigonométricas

Teorema

As funções sen *e* cos *são contínuas.*

Teorema

Dois limites utéis:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \text{ e também } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Exercício

Calcule:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.
4. $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x-1}$

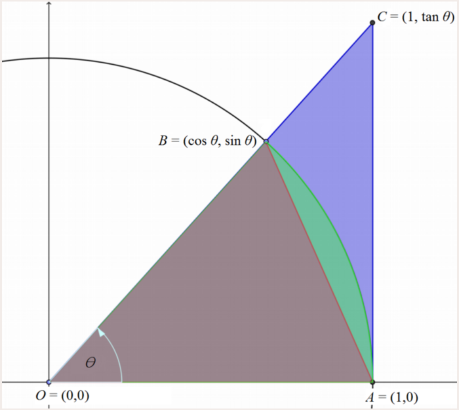
Funções trigonométricas e desigualdades

Teorema

Para $0 < x < \pi/2$*:*

$$\mathrm{sen}x < x < \mathrm{tg}x.$$

Demonstração



Limites no infinito e limites infinitos

1. **Limites no infinito:**

Definição

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *significa: "eu posso fazer* $f(x)$ *arbitrariamente perto de* L*, tomando* x *suficientemente grande."*

Exemplos: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. **Leis do limite:** se $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1$ e $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_2$, então:

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1 + L_2 \text{ e também } f(x).g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1.L_2$$

3. **Lei do quociente:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{L_1}{L_2} \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Praticar com limites no infinito

Exercício

15. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x-2}{2x+1}$

16. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1-x^2}{x^3-x+1}$

17. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x-2}{x^2+1}$

18. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+6x^2-2}{2x^3-4x+5}$

19. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\sqrt{t}+t^2}{2t-t^2}$

20. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{t-t\sqrt{t}}{2t^{3/2}+3t-5}$

21. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2+1)^2}{(x-1)^2(x^2+x)}$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

23. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

24. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

25. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$

26. $\lim_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

27. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

28. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}$

29. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}$

30. $\lim_{x\to\infty} (e^{-x}+2\cos 3x)$

31. $\lim_{x\to-\infty} (x^4+x^5)$

32. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1+x^6}{x^4+1}$