MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 7/ Sexta 14/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 6

1. **Definições de limites:** definição rigorosa de $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ como:

Definição

$''\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty''$ $\Leftrightarrow$ para qualquer numero M, existe um numero N tal que $f(x) > M$ sempre que $x > N$.

2. **Definições de limites:** definição rigorosa de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ como:

Definição

Seja f ua função definida sobre um intervalo aberto que contém a, exceto possivelmente no ponto a. A frase $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa: para todo número $\epsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

3. **Leis dos limites**

Resumo Aula 6

Teorema

Seja c uma constante e suponha que existam os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, então:

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ if $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Cuidado: com os quotientes! Especialmente o caso $\frac{0}{0}$...

Conseqüências das leis do limite e Continuidade

1. **Continuidade:**

Definição (Continuidade de uma função f num ponto $p \in Dom(f)$)

Suponhamos f definida em p. Então:

$$f \text{ continua em } p \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Definição (Continuidade de uma função f num intervalo (a, b))

Suponhamos f definida em (a, b). Então:

$$f \text{ continua no intervalo } (a, b) \Leftrightarrow f \text{ é continua em cada } x \in (a, b).$$

2. **Continuidade dos polinômios e das funções racionais:**

Teorema

Toda função polinomial é continua. Toda função racional f é continua no seu domínio.

Leis da Continuidade

Teorema

Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções são contínuas, também em a:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $c.f$
4. fg
5. $\frac{f}{g}$ *se* $g(a) \neq 0$.

Exemplos

Exercício

Calcule o limite se existir (somente 3,4,8):

3. $\lim_{x \to 3} (5x^3 - 3x^2 + x - 6)$

4. $\lim_{x \to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t \to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t \to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5} \right)^2$

9. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

Exemplos

Exercício

Calcule o limite se existir(somente 11,13,17,18,19,21,22):

11. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\displaystyle\lim_{t\to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\displaystyle\lim_{u\to 2} \frac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

Exemplos 2

Exercício

Calcule o limite se existir:

23. $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \frac{1}{t}\right)$

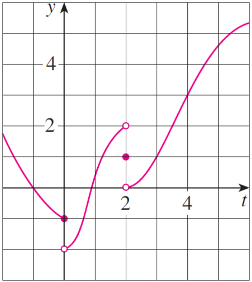
30. $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x + h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$

Limites laterais: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Lido como: "o limite esquerdo de $f(x)$ quando x tende a a. Também: o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda.



Exercício

Escrever a definição rigorosa do limite esquerdo e direito.

Observação

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

Limites laterais: exemplos

Exercício

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ *onde* $f(x) = x^2$ *se* $x \leq 1$, $e = 2x - 1$ *se* $x > 1$.

Exercício

$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$.

Exercício

A afirmação seguinte é verdadeira ou falsa?
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow f$ *continua.*

Limites e desigualdades

Teorema

Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está proximo de a (exceto possivelmente em a), e os limites de f e g existem quando x tende a a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Desigualdade estrita: cuidado, podemos ter $f(x) < g(x)$ mas $L_1 = L_2$!

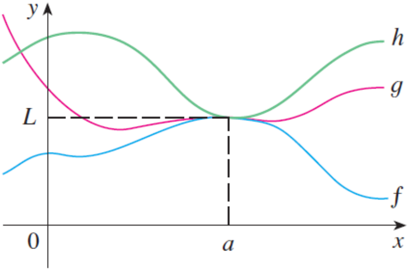
Teorema (do Confronto, ou Teorema do Sanduíche)

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está proximo de a (exceto possivelmente em a), e

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} h(x) = L$$

enão:

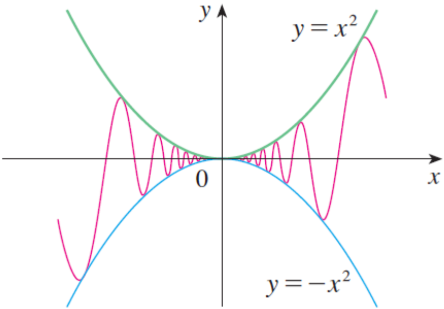
$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$



Exercício

Mostrar $\lim_{x \to 0} x^2 . \cos^{17}(\frac{1}{x}) = 0.$

Limites e desigualdades III: Teorema do Sanduíche



Exercício

Mostrar $\lim_{x \to 0} x^2 . \cos(\frac{1}{x}) = 0.$

Exercício

Mostrar $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2} \sin \frac{\pi}{x} = 0.$

Limites e funções compostas

Teorema

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. Se $\lim_{x \to p} f(x) = a$ e g contínua em a, então:

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u).$$

Teorema (Caso mais utilizado)

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. Se f for contínua em p e g contínua em $f(p)$, então a composta $h(x) = g(f(x))$ será contínua em p

Exercício

Calcule

1. $\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}$
2. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$