MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 36/ Segunda 16/06/2014

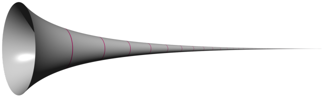
Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Trombeta de Gabriel

Definição

A trombeta de Gabriel (=do anjo Gabriel) é a superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = \frac{1}{x}$*, com* $x \in [1, \infty)$ *ao redor do eixo* x*.*



Volume do solido de revolução:

$$V = \int_1^{+\infty} \pi.\left(\frac{1}{x^2}\right) dx := \pi. \lim_{r\to\infty} \int_1^r \pi.\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Mas isso é:

$$= \pi. \lim_{r\to\infty} [-1/x]_1^r = \pi. \lim_{r\to\infty} (1 - \frac{1}{r}) = \pi.$$

Área da superfície de revolução:

$$A = 2\pi \int_1^r \frac{1}{x}.\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln r \to \infty!$$

Integrais impróprias

Definição

Se $\int_a^t f(x)dx$ *existe para todo* $t \geq a$ *então:*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista (como um número, finito). Neste caso, a integral imprópria $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *é chamada convergente.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$*.*

Integrais impróprias, segundo tipo

Definição

Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

se esse limite existir (como um número real finito), e a integral imprópria é chamada convergente (divergente, se não).
Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

se esse limite existir (como um número real finito).
Se f tiver uma descontinuidade em c, com $a < c < b$ e $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ forem convergentes, então podemos definir: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Teorema de comparação para as integrais impróprias

Teorema

Vamos supor que f e g são contínuas com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$.

1. *Se $\int_a^\infty f(x)dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)dx$ é convergente.*
2. *Se $\int_a^\infty g(x)dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)dx$ é divergente também.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Exemplos

Exercício

Calcule:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$
5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$
6. $\displaystyle\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{r^{0.999}}$
9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$
10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$

Exercício

Convergente ou divergente?

41. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin t}$

42. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t - \sin t}$ ($t \geq \sin t$ $t \geq 0$)

43. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1 - x^2}$

44. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1 - x}$

45. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln |x| dx$

46. $\displaystyle\int_{-1}^{1} -x \ln |x| dx$

47. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$

48. $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$

49. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v - 1}}$

50. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1 + e^{\theta}}$

51. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 1}}$

52. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

53. $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\sqrt{x + 1}}{} \, dx$

54. $\displaystyle\int^{\infty} \frac{x\,dx}{}$

Exemplos:

$$y'(x) = k.y(x)$$

As soluções são exatamente as funções $Y(x) = C.e^{kx}$, onde $C = y(0)$ pode ser qualquer constante.

Exemplos 2:

Exercício

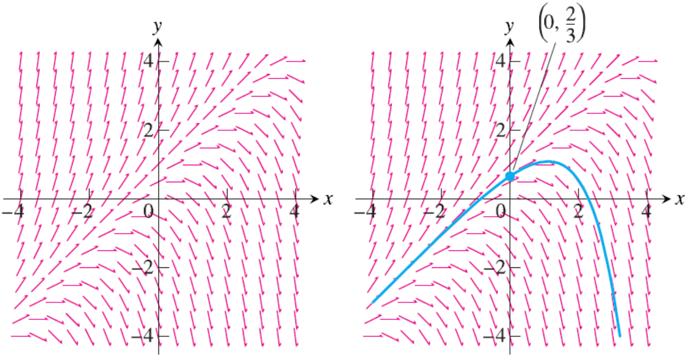
Mostrar que cada função do tipo $y = \frac{C}{x} + 2$ *é solução da equação* $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$ *no intervalo* $(0, \infty)$.

Exercício

Mostrar que a função $y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$ *é solução do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \qquad y(0) = \frac{2}{3}.$$

Campo de direções: dada a equação $y' = f(x,y)$, no plano (x,y), passando para cada ponto (x,y) podemos desenhar um pequeno segmento de inclinação $m = f(x,y)$

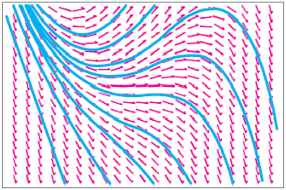


(a) (b)

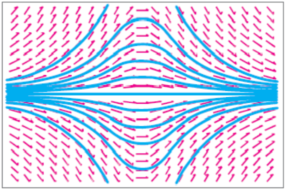
Equações diferenciais: campos de direções

Exemplos de campos de direções e soluções:

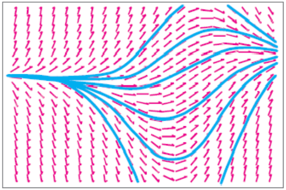
(a) $y' = y - x^2$



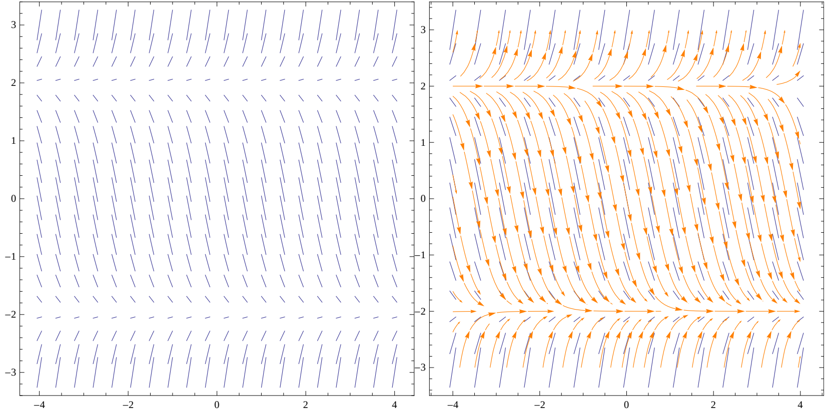
(b) $y' = -\dfrac{2xy}{1 + x^2}$



(c) $y' = (1 - x)y + \dfrac{x}{2}$



Exemplos de campos de direções e soluções: $y' = (y+2)(y-2)$



Equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis

Definição (Equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis)

São do tipo:

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$$

Soluções constantes:

Exercício

Determine, caso existam, as soluções constantes: $x'(t) = x^2 - x$ *e* $x'(t) = t(1 + x^2)$.

Soluções não constantes: A ideia é de "separar as variáveis" e integrar:

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt \Rightarrow \int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt \Rightarrow H(x) = G(t) + C$$

Equações diferenciais

Lei de crescimento natural: A população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população P:

$$\frac{dP}{dt} = k.P$$

Solução: $P(t) = A.e^{kt}$, onde A é uma constante arbitrária.
Utilizando integrais:

$$\frac{dP}{P} = k.dt$$

então:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k.dt$$

$$\ln |P| = kt + C$$

$$|P| = e^C.e^kt$$

$$P = A.e^{kt},$$

onde $A = \pm e^C$.

Problema de valor inicial

Teorema

A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = k.P, \qquad P(0) = P_0$$

é:

$$P(t) = P_0.e^{kt}$$

Lei de crescimento natural, com emigração:

$$P' = kP - m$$

Como resolver essa nova equação?

População e equação logistica:

Novo modelo: quando a pop. é muito grande ($\geq K$), a taxa de crescimento é negativa. Mas para P pequena, a taxa é quase $= k.P$

$$\frac{dP}{dt} = kP(1 - \frac{P}{k})$$

Como resolver essa equação?

$$\int \frac{K}{P.(K-P)} dP = \int k.dt$$

Agora podemos observar que:

$$\frac{K}{P.(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}$$

então:

$$\ln|P| - \ln|K-P| = kt + C \Rightarrow \frac{K-P}{P} = A.e^{-kt}$$

e finalmente:

$$P = \frac{K}{1 + A.e^{-kt}}$$

População e equação logistica:

Interpretação da constante A: na equação

$$P = \frac{K}{1 + A.e^{-kt}}$$

podemos fazer $t = 0$. Então $P = P_0$ (a população inicial), e

$$\frac{K - P_0}{P_0} = Ae^0 = A.$$

Exercício

Escreva a solução para o problema de valor inicial:

$$P' = 0,08P(1 - P/1000), \text{ com } P(0) = 100.$$

Use-a para encontrar os tamanhos da pop. $P(40), P(80)$. *Quando* $P(t) = 900$?

Resp. temos $P(t) = \frac{1000}{1+A.e^{-0,008t}}$ onde $A = \frac{1000-100}{100} = 9$.

População e equação logistica:exercicio

Então $P(40) = \frac{1000}{1+9e^{-3,2}} \simeq 731,6$ e $P(80) = \frac{1000}{1+9e^{-6,4}} \simeq 985,3$.
Agora $P(t) = 900$ vai acontecer quando $\frac{1000}{1+9e^{-0,08t}} = 900 \Rightarrow t = 54,9$.

Equações lineares

Uma equ. diferencial linear de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$$

Exemplo: $x.y' + y = 2x$ para $x \neq 0$. Mas não é separável. Agora podemos escrever:

$$xy' + y = (xy)'$$

então a equ. é : $(x.y)' = 2x \Rightarrow xy = x^2 + C$ ou $y = x + C/x$. A função x é chamada um fator integrante para a equação $y' + \frac{1}{x}y = 2$.

Fator integrante

Teorema

Para resolver a equação diferencial linear $y' + P(x).y = Q(x)$*, multiplique os dois lados pelo fator integrante* $I(x) = e^{\int P(x)dx}$ *e integre os dois lados.*

A ideia é: $I(x).(y' + P(x).y) = (I(x).y)'$.

Exercício

Mostrar que neste caso $y(x) = \frac{1}{I(x)}.(\int I(x)Q(x)dx + C)$

Exercício

Resolva $y' + 3x^2.y = 6x^2$

Exercício

Encontre a solução para o problema de valor inicial $x^2.y' + xy = 1$ *com* $x > 0$ *e* $Y(1) = 2$

Mais exemplos

Exercício

Resolva

1. $y' + 2y = 2.e^x$.
2. $xy' - 2y = x^2$.
3. $x^2y' + 2xy = \cos^2 x$.

Exercício

Encontre a solução para o problema de valor inicial

1. $y' + y = x + e^x, y(0) = 0$.
2. $t.y'(t) + 2y = t^3 \text{ com } t > 0 \text{ e } y(1) = 0$.
3. $2xy' + y = 6x. \text{ com } x > 0 \text{ e } y(4) = 20$.

Mudança de variavel

Exercício

Na equ. $y'(x) + P(x).y = Q(x).y^n$*, fazer* $u = y^{1-n}$ *e transformar a equ. na equ. linear*

$$u'(x) + (1-n)P(x).u = (1-n).Q(x)$$

Exercício

Resolver

1. $xy' + y = -x.y^2$
2. $y' + (2/x)y = (y^3)/x^2$

Exercício

Fazer $u = y'$ *para resolver a equação de segunda ordem* $x.y'' + 2y' = 12x^2$.