MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 35/ Sexta 13/06/2014

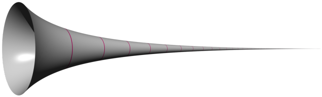
Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Trombeta de Gabriel

Definição

A trombeta de Gabriel (=do anjo Gabriel) é a superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = \frac{1}{x}$, com $x \in [1, \infty)$ ao redor do eixo x.



Volume do solido de revolução:

$$V = \int_1^{+\infty} \pi . \left(\frac{1}{x^2}\right) dx := \pi . \lim_{r \to \infty} \int_1^r \pi . \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Mas isso é:

$$= \pi . \lim_{r\to\infty} [-1/x]_1^r = \pi . \lim_{r\to\infty} (1 - \frac{1}{r}) = \pi .$$

Área da superfície de revolução:

$$A = 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} . \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln r \to \infty!$$

Definição

Se $\int_a^t f(x)dx$ *existe para todo* $t \geq a$ *então:*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista (como um número, finito). Neste caso, a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)dx$ *é chamada convergente.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$.

Integrais impróprias, segundo tipo

Definição

Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

se esse limite existir (como um número real finito), e a integral imprópria é chamada convergente (divergente, se não).
Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

se esse limite existir (como um número real finito).
Se f tiver uma descontinuidade em c, com $a < c < b$ e $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ forem convergentes, então podemos definir: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Teorema de comparação para as integrais impróprias

Teorema

Vamos supor que f *e* g *são contínuas com* $f(x) \geq g(x) \geq 0$ *para* $x \geq a$.

1. *Se* $\int_a^\infty f(x)dx$ *é convergente, então* $\int_a^\infty g(x)dx$ *é convergente.*
2. *Se* $\int_a^\infty g(x)dx$ *é divergente, então* $\int_a^\infty f(x)dx$ *é divergente também.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$.

Exemplos

Exercício

Calcule:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$

6. $\displaystyle\int_{-8}^{1} \frac{dx}{x^{1/3}}$

7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dr}{r^{0.999}}$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$

Exemplos 2

Exercício

Convergente ou divergente?

41. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin t}$

42. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t - \sin t}$ ($t \geq \sin t$ $t \geq 0$)

43. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1 - x^2}$

44. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1 - x}$

45. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx$

46. $\displaystyle\int_{-1}^{1} -x \ln|x|\,dx$

47. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$

48. $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$

49. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v - 1}}$

50. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1 + e^{\theta}}$

51. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 1}}$

52. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

53. $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\sqrt{x + 1}}{\ } dx$

54. $\displaystyle\int^{\infty} \frac{x\,dx}{\ }$

Equações diferenciais

Lei de crescimento natural: A população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população P:

$$\frac{dP}{dt} = k.P$$

Solução: $P(t) = A.e^{kt}$, onde A é uma constante arbitrária.
Utilizando integrais:

$$\frac{dP}{P} = k.dt$$

então:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k.dt$$

$$\ln |P| = kt + C$$

$$|P| = e^C.e^kt$$

$$P = A.e^{kt},$$

onde $A = \pm e^C$.

Problema de valor inicial

Teorema

A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = k.P, \qquad P(0) = P_0$$

é:

$$P(t) = P_0.e^{kt}$$

Lei de crescimento natural, com emigração:

$$P' = kP - m$$

Como resolver essa nova equação?

População e equação logistica:

Novo modelo: quando a pop. é muito grande ($\geq K$), a taxa de crescimento é negativa. Mas para P pequena, a taxa é quase $= k.P$

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k(1 - \frac{P}{k})$$

Como resolver essa equação?

$$\int \frac{K}{P.(K-P)} dP = \int k.dt$$

Agora podemos observar que:

$$\frac{K}{P.(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}$$

então:

$$\ln|P| - \ln|K-P| = kt + C \Rightarrow \frac{K-P}{P} = A.e^{-kt}$$

e finalmente:

$$P = \frac{K}{1 + A.e^{-kt}}$$