MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 33/ Terça 03/06/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 32

1. **Prova:** P2 na terça 10/06.
2. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html` No site, tem agora mais: Lista 6 (Integrais, parte 1, com Respostas) e Lista 7 (Integrais parte II, com respostas)
3. **Volumes dos sólidos de revolução:** método dos anéis.
4. **Volumes dos sólidos de revolução:** Método das cascas cilíndricas
5. **Comprimento de curva**
6. **Substituição trigonométrica**

Formula do comprimento para uma curva $y = f(x)$:

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Comprimento de curva em forma paramétrica:

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Exercício

Calcule o comprimento da curva dada em forma paramétrica: $x = 3t$ *e* $y = 2t^{3/2}$, $0 \leq t \leq 1$.

Substituições trigonométricas: para frações racionais e funções do tipo $\sqrt{1-x^2}$, as substituições $x = \text{sen}(u)$, $x = \cos(u)$ ou $x = tg(u)$ podem ajudar.

Exercício

Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$*. Ja sabemos o resultado arcseno*$(x) + C$*, mas aqui podemos fazer a substituição* $x = \text{sen}(u)$.

Exercício

Fazer $x = tg(u)$ *para calcular* $\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{1+x^2}}$.

Mais exemplos

Observação: a mudança $u = tg(x/2)$ é muito util:

1. mostrar que $dx = \frac{2du}{1+u^2}$
2. mostrar que $\text{sen}x = \frac{2u}{1+u^2}$
3. mostrar que $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Conclusão: cada fração racional com cos , sen pode ser escrita como uma fração racional normal, em u!

Exercício

Antiderivada de $1/\text{sen}x$**:** *Fazer* $u = \text{tg}(x/2) \Rightarrow x = 2tg^{-1}(u)$ *e* $dx = 2du/(1+u^2)$*. Agora* $1 + u^2 = 1/(\cos(x/2))^2$ *e* $\frac{2u}{1+u^2} = \text{sen}x$*. Fazer agora a substituição.*

Mais exemplos

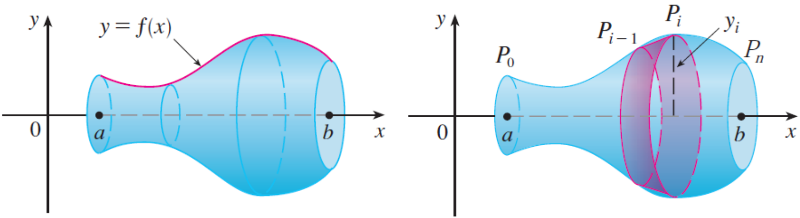
Exercício

Calcule as antiderivadas:

1. $\int \sqrt{1-4x^2}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ *(integração por partes aqui seria melhor)*
3. $\int \frac{dx}{1+\text{sen}x}$ *(fazer $u = tg(x/2)$).*
4. $\int \frac{1}{\cos x}dx$

Definição

Uma superfície de revolução é obtida quando uma curva é girada ao redor de uma reta.



Área total da superfície de revolução: é a soma das áreas de pequenas faixas (=rotação de um pequeno segmento de curva). Vamos dar a formula para a rotação ao redor do eixo x:

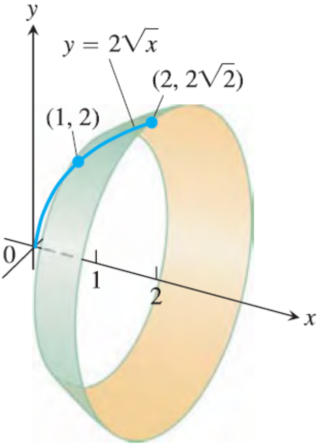
$$S = \int_a^b 2\pi f(x).\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Exemplos: Área de uma superfície de revolução

Exercício

Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x:

$$y = 2\sqrt{x}, 1 \leq x \leq 2.$$



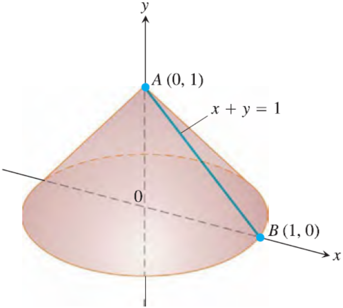
Área de uma superfície de revolução: rotação ao redor do eixo y

Área total da superfície de revolução:

$$S = \int_a^b 2\pi g(y).\sqrt{1 + (g'(y))^2}dy$$

Exercício

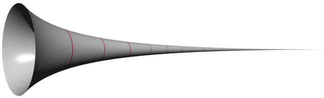
Cone obtido pela rotação de $x = 1 - y$, $0 \leq y \leq 1$, ao redor do eixo y.



Trombeta de Gabriel

Definição

A trombeta de Gabriel (=do anjo Gabriel) é a superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = \frac{1}{x}$, com $x \in [1, \infty)$ ao redor do eixo x.



Volume do solido de revolução:

$$V = \int_1^{+\infty} \pi . \left(\frac{1}{x^2} \right) dx := \pi . \lim_{r \to \infty} \int_1^r \pi . \left(\frac{1}{x^2} \right) dx$$

Mas isso é:

$$= \pi . \lim_{r \to \infty} [-1/x]_1^r = \pi . \lim_{r \to \infty} (1 - \frac{1}{r}) = \pi .$$

Área da superfície de revolução:

$$A = 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} . \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln r \to \infty!$$

Integrais impróprias

Definição

Se $\int_a^t f(x)dx$ *existe para todo* $t \geq a$ *então:*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista (como um número, finito). Neste caso, a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)dx$ *é chamada convergente.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$.