MAT 2110 : Cálculo para Química

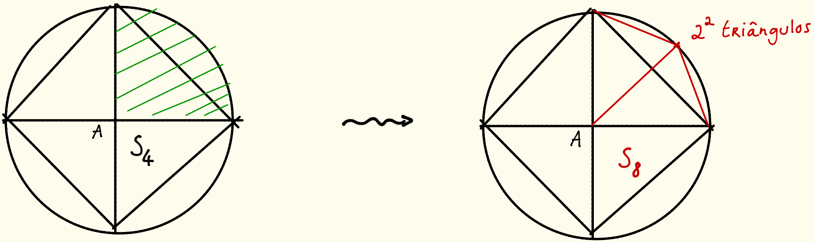
Aula 25/ Terça 13/05/2014

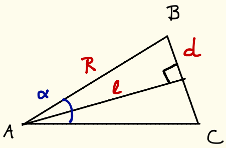
Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 24

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Regra de L'Hospital e exemplos**





Temos: Area (Triângulo ABC) $= d \cdot \ell = \left(R \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(R\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

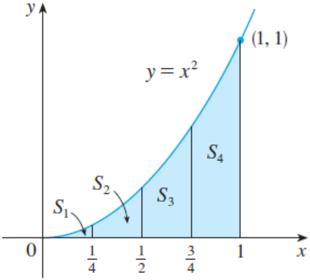
Depois de n etapas: temos 2^n triângulos, com angulo $\hat{A} = \frac{\pi/2}{2^n}$

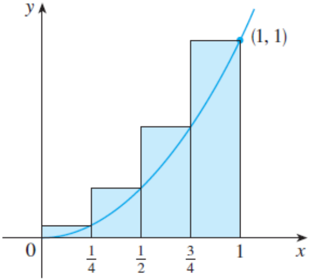
Soma das áreas dos triângulos $= 2^n \cdot \frac{R^2}{2} \operatorname{sen}\frac{\pi/2}{2^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^n}{\pi/2} \cdot \frac{R^2}{2} \operatorname{sen}\frac{\pi/2}{2^n}$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 1 = \frac{\pi R^2}{4}$$

Integrais

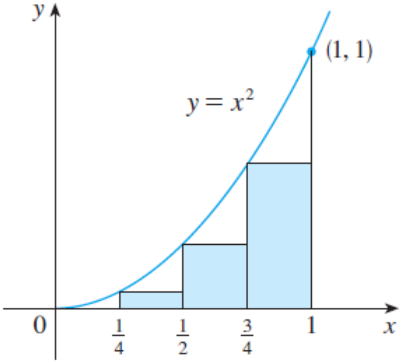
Ideia: como calcular a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$? ("dividir e aproximar")





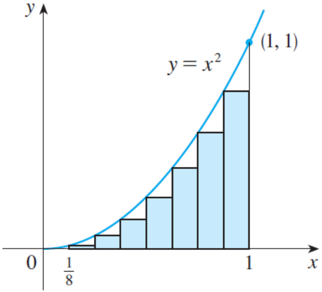
Aproximar com retângulos: obter uma estimativa superior da área: aqui *area*$(S) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4$. Os retângulos têm a mesma base $= 1/4$ e alturas $(1/4)^2, (2/4)^2, (3/4)^2, (4/4)^2$.

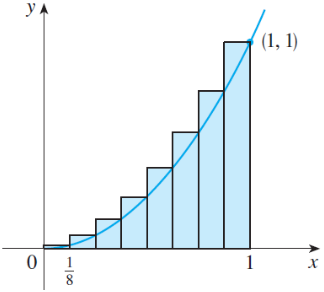
Aproximar com retângulos: obter uma estimativa inferior da área: aqui $area(S) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. Os retângulos têm a mesma base $= 1/4$ e alturas $0, (1/4)^2, (2/4)^2, (3/4)^2$.



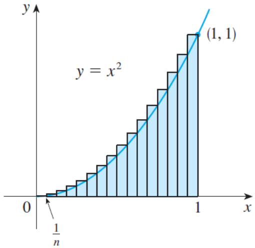
Aproximando com oito retângulos

Aproximar com 8 retângulos: estimativa inferior e superior da área: usando extremos esquerdos e direitos dos intervalos





Tomando o limite: vamos dividir $[0,1]$ em n intervalos iguais, construir retângulos usando os extremos direitos, calcular a soma das áreas dos n retângulos e fazer $n \to \infty$.



$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right)
\end{aligned}
$$

Somas uteis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Prova das 3 formulas

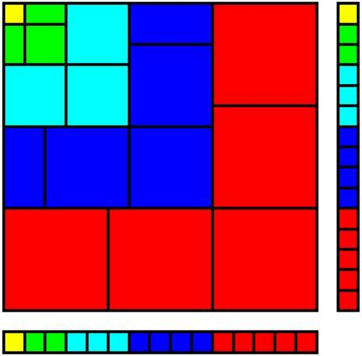
Formula 1: escrever

$$2S = (1 + 2 + \ldots + n) + (n + (n-1) + \ldots + 2 + 1)$$

$$= (1+n) + (2 + (n-1)) + \ldots + ((n-1) + 2) + (n+1) = n.(n+1)$$

Formula 2: indução!

Formula 3: prova geometrica:



Integral definida

Definição

Seja f uma função contínua em $[a,b]$. Podemos dividir $[a,b]$ em n subintervalos $[x_0,x_1],\ldots[x_{n-1},x_n]$ de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em cada $[x_{i-1},x_i]$ vamos escolher um ponto amostral $x_i^\star$. Então a integral definida de f de a para b é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$$

Teorema

Se f é continua em $[a,b]$ ou tem um número finito de descontinuidades, então a integral de f de a para b existe.

Vocabulario: $f(x)$=integrando, a,b são os limites de integração (inferior e superior).

Definição

A soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$ é chamada uma "soma de Riemann"

Exemplos

Exercício

Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$, *escreve a soma de Riemann com* $n = 5$, *tomando como pontos amostrais os pontos médios.*

Exercício

Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1 + x_i} \Delta x, [1, 5]$$

Exercício

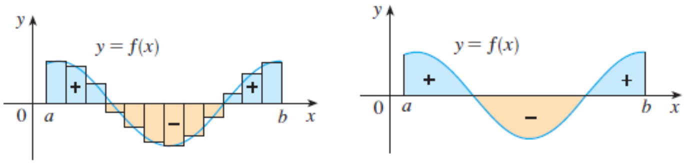
Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$, *escreve a soma de Riemann com* $n = 5$, *tomando como pontos amostrais os pontos médios.*

Exercício

Calcule $\int_1^2 x^3 dx$

Propriedades da integral

Interpretação da integral: área líquida (=diferença das áreas)



Teorema

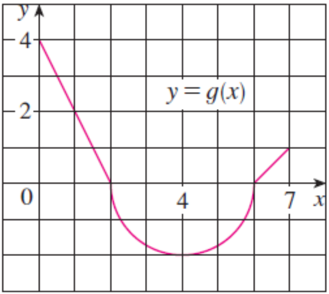
1. *Se* $f(x) \geq 0$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. *Se* $f(x) \geq g(x)$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. *Se* $m \leq f(x) \leq M$ *para* $a \leq x \leq b$ *então*
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$

Exemplos

Exercício

O gráfico de g consiste em duas retas e um semicircuo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



Mais exemplos

Exercício

Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais:

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\, dx \geqslant 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$$

$$2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leqslant \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$$