MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 22/ Terça 06/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 21

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Estudo da variação das funções**: Teorema do valor médio, teorema de Rolle. Demonstração de: $f' = 0$ em $(a, b) \Rightarrow$ f =cconstante.
3. **Primitivas de uma função**
4. **Intervalos de crescimento e decrescimento:** $f'(x) > 0$ em (a, b) implica f estritamente crescente.
5. **Teste da Primeira derivada**
6. **Máximo, mínimo global de funções**: para f contínua em $[a, b]$ e derivavel em (a, b)

Máximo absoluto (ou global)

Definição

Uma função f tem máximo absoluto (ou máximo global) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$. O número $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D_f. Também f tem um mínimo absoluto em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$, e o número $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D_f. Os valores máximo e mínimo de f são chamados valores extremos de f.

Como determinar os valores extremos de f contínua em $[a, b]$ fechado:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b);
2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo (isto é, em a e b);
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f

Exercício

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$

$f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

$f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

$f(t) = \sqrt[3]{t}(8 - t), \quad [0, 8]$

$f(t) = 2\cos t + \sin 2t, \quad [0, \pi/2]$

$f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

$f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

$f(x) = x - \ln x, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

$f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

Uso da derivada segunda

Concavidade:

Definição

Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo $I = (a, b)$, então ele é chamado côncavo para cima em I. Se o gráfico estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, ele é chamado côncavo para baixo em I.

Como determinar a concavidade:

Teorema

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f é côncavo para cima em I.*
2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.*

Exercício

Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão para:
$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ *e* $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

Uso da derivada segunda II

Definição

Um ponto P na curva $y = f(x)$ é um ponto de inflexão se f é continua e a função mudar de concavidade em P.

Observação: se a curva tiver uma tangente em P ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente em P.

Mais uma aplicação:

Teorema (Teste da derivada segunda)

Suponha que f'' seja contínua perto de c.

1. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo local em c.*
2. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$ então f tem um máximo local em c.*

Exercício

Encontre os valores de máximo e mínimo locais de f com o teste das derivadas primeira e depois o teste da derivada segunda, para

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}, \text{ e depois } g(x) = x + \sqrt{1-x}.$$

Derivadas e formas indeterminadas: a regra de L'Hôspital

Teorema

Vamos supor que f e g têm derivadas e que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \ \textit{ou} \ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

onde a pode ser um número real finito, $+\infty$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Como mostrar o teorema: caso facil onde f' é contínua: simplesmente observar que $f(x) \simeq f(a) + f'(a).(x-a)$ perto de a.

Exemplos

Exercício

Com a regra de L'Hôpital, estudar:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen} x}{x}$
2. $\lim_{t\to 1} \frac{5t^4-4t^2-1}{10-t-9t^3}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$
4. $\lim_{x\to 0^+} x.\ln x$ *(pensar: $f(x) = \frac{\ln x}{1/x}$!)*
5. $\lim_{x\to -\infty} x.e^x$ *(que tentar? $e^x/(1/x)$ ou x/e^{-x}?)*
6. *Mais complicado:* $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ *(do tipo ∞^0).*

Problemas de otimização

Exercício

Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicirculo de raio r.

Exercício

Encontreo os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.

Prova: Escrever o quadrado da distança $d^2 = (x-1)^2 + y^2$ como uma função de x e encontrar os pontos criticos e aplicar o teste da derivada segunda. Calcular também os valores em -1 e 1 (lembra que $x \in [-1, 1]$).

Exercício

Area do maior retângulo inscrito na elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.