

# MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 21/ Segunda 05/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

- 1 **Site:** <http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html>
- 2 **Equações diferenciais:** resolução de  $y' = ky$  e de  $y' = ky + b$ .
- 3 **Decaimento radioativo**
- 4 **Estudo da variação das funções:** Teorema do valor médio.
- 5 **Intervalos de crescimento e decréscimo:**  $f'(x) > 0$  em  $(a, b)$  implica  $f$  estritamente crescente.
- 6 **Máximo, mínimo local e global de funções**

# Teorema do valor intermediário e consequências

## Teorema (Teorema de Rolle)

Seja  $f$  uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

- 1  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ ,
- 2  $f$  é diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ ,
- 3  $f(a) = f(b)$ , Então existe um número  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

## Teorema (do valor intermediário)

Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$  e se  $\gamma$  for um real compreendido entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existirá pelo menos um  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = \gamma$ .

**Consequência:** se  $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow$  existe  $\gamma \in ]a, b[$  tal que  $f(\gamma) = 0$ .

## Teorema

Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$  então existirão  $x_1$  e  $x_2$  em  $[a, b]$  tais que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  para todo  $x \in [a, b]$ . (Isto é  $f(x_1)$  é o valor mínimo de  $f$  em  $[a, b]$ , e  $f(x_2)$  é o valor máximo)

# Valor intermediário e equação $y' = 0$

## Teorema

Se  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  em um intervalo  $(a, b)$  então  $f$  é constante em  $(a, b)$ .

**Prova:** Vamos tomar  $x_1 < x_2$ . Então existe um  $c \in (x_1, x_2)$  tal que  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1)$ .

**Consequência muito importante:** determinar as primitivas de uma função  $f(x)$  em  $(a, b)$

## Definição

Uma função  $F(x)$  em  $(a, b)$  é uma primitiva de  $f(x)$  se  $F'(x) = f(x)$  em  $(a, b)$ .

## Exercício

Determinar todas as primitivas em  $\mathbb{R}$  de:

①  $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$

②  $f(x) = \cos(x)$

③  $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$  em  $(a, b) = (0, \infty)$

# Máximo, mínimo local

## Definição

- 1 *Uma função  $f$  tem um máximo local em  $c$  se  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x$  em algum intervalo aberto contendo  $c$ .*
- 2 *Uma função  $f$  tem um mínimo local em  $c$  se  $f(c) \leq f(x)$  para todo  $x$  em algum intervalo aberto contendo  $c$ .*

**Como reconhecer um máximo ou mínimo local para  $f$  derivável:**

## Teorema

*Se  $f$  tiver um máximo ou mínimo local em  $c$  e  $f'(c)$  existir, então  $f'(c) = 0$ .*

**Demonstração:**

## Definição

*Um número crítico de uma função  $f$  é um número  $c$  no domínio de  $f$  tal que  $f'(c) = 0$  ou  $f'(c)$  não existe.*

## Exercício

*Encontre os números críticos:*

$$① f(x) = \frac{x-2}{(x-3)(x-4)}$$

$$② g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$$

# Teste da derivada primeira

## Teorema

Suponha que  $c$  seja um número crítico de  $f$  contínua.

- 1 Se o sinal de  $f'$  mudar de positivo para negativo em  $c$  então  $f$  tem um máximo local em  $c$ ,
- 2 Se o sinal de  $f'$  mudar de negativo para positivo em  $c$ , então  $f$  tem um mínimo local em  $c$ ,
- 3 Se  $f'$  não mudar de sinal em  $c$ , então  $f$  não tem máximo ou mínimo locais em  $c$ .

## Exercício

Encontre os valores de max e min com o teste da primeira derivada para  $f(x) = x^5 - 5x + 3$

# Máximo absoluto (ou global)

## Definição

Uma função  $f$  tem máximo absoluto (ou máximo global) em  $c$  se  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x \in D_f$ . O número  $f(c)$  é chamado valor máximo de  $f$  em  $D_f$ . Também  $f$  tem um mínimo absoluto em  $c$  se  $f(c) \leq f(x)$  para todo  $x \in D_f$ , e o número  $f(c)$  é chamado valor mínimo de  $f$  em  $D_f$ . Os valores máximo e mínimo de  $f$  são chamados valores extremos de  $f$ .

**Como determinar os valores extremos de  $f$  contínua em  $[a, b]$  fechado:**

- 1 Encontre os valores de  $f$  nos números críticos de  $f$  em  $(a, b)$ ;
- 2 Encontre os valores de  $f$  nos extremos do intervalo (isto é, em  $a$  e  $b$ );
- 3 O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.



# Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de $f$

## Exercício

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$$

$$f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$$

$$f(t) = \sqrt[3]{t(8 - t)}, \quad [0, 8]$$

$$f(t) = 2\cos t + \sin 2t, \quad [0, \pi/2]$$

$$f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$$

$$f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$$

$$f(x) = x - \ln x, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$$

# Uso da derivada segunda

## Concavidade:

### Definição

*Se o gráfico de  $f$  estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo  $I = (a, b)$ , então ele é chamado côncavo para cima em  $I$ . Se o gráfico estiver abaixo de todas as suas tangentes em  $I$ , ele é chamado côncavo para baixo em  $I$ .*

## Como determinar a concavidade:

### Teorema

- 1 Se  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in I$  então o gráfico de  $f$  é côncavo para cima em  $I$ .
- 2 Se  $f''(x) < 0$  para todo  $x \in I$  então o gráfico de  $f$  é côncavo para baixo em  $I$ .

### Exercício

Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão para:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \text{ e } g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

### Definição

*Um ponto  $P$  na curva  $y = f(x)$  é um ponto de inflexão se  $f$  é contínua e a função mudar de concavidade em  $P$ .*

**Observação:** se a curva tiver uma tangente em  $P$  ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente em  $P$ .

**Mais uma aplicação:**

### Teorema (Teste da derivada segunda)

*Suponha que  $f''$  seja contínua perto de  $c$ .*

- 1 Se  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) > 0$  então  $f$  tem um mínimo local em  $c$ .
- 2 Se  $f'(c) = 0$  e  $f''(c) < 0$  então  $f$  tem um máximo local em  $c$ .

## Exercício

*Encontre os valores de máximo e mínimo locais de  $f$  com o teste das derivadas primeira e depois o teste da derivada segunda, para*

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}, \text{ e depois } g(x) = x + \sqrt{1 - x}.$$