MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 19/ Segunda 28/04/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 18

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Funções inversas** exemplo $\sqrt{x}$ para $x \mapsto x^2$
3. **Derivada da função inversa:**

$$(f^{-1})'(x) = g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(g(x))} \text{ para todos} x \in D_g$$

4. **Derivada de arco-seno**
5. **Funções Logarítmicas**
6. Para todo $x \in (0, \infty)$ $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
7. **Equações diferenciais:** $y' = 0$ no intervalo (a, b) é equivalente à $Y(t) = constante$.

Equações diferenciais

Definição

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função y que aparece na equação também com as derivadas de y.

Exemplos: $y' = 3y + 1$, $y'' = -y$, $y.y' = 2y''$.
O primeiro teorema é muito intuitivo:

Teorema

As soluções da equação $y' = 0$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções constantes.

Teorema

As soluções da equação $y' = k.y$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções

$$y(t) = C.e^{kt}, \text{ onde } C \text{ é uma constante.}$$

Solução de $y' = ky$

Prova: E facil de ver que $y(t) = C.e^{kt}$ são soluções.
Agora seja $g(t)$ uma solução. Vamos definir uma nova função

$$h(t) = g(t).e^{-kt}$$

Então $h'(t) = g'(t).e^{-kt} + g(t)(-k.e^{-kt}) = kg(t)e^{-kt} - kg(t).e^{-kt} = 0$.
Isso implica que $h(t) = Constante = C$, e depois que $g(t) = C.e^{kt}$.

Exercício (Equação $y' = ky + b$)

1. *dar um exemplo de solução.*
2. *Mudar de variavel: escolher uma função simples do tipo* $u = \alpha.y + \beta$ *para obter uma nova equação do tipo* $u' = K.u$
3. *resolver a equação original.*

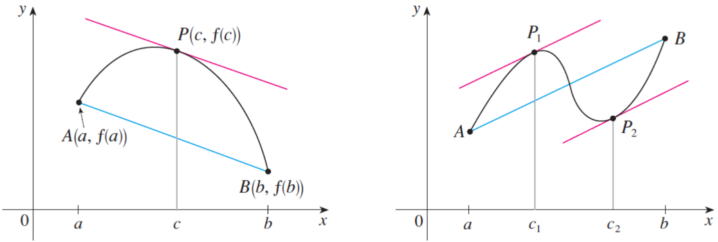
Estudo da variação das funções

Objetivo: dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, queremos cortar $\mathbb{R}$ em intervalos (a, b) onde f é crescente ou decrescente.

Teorema (Teorema do valor médio)

Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \text{ ou } f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$$



Intervalos de crescimento e de decrescimento

Teorema

Seja f contínua no intervalo I

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I,*
2. *Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.*

Demonstração: Vamos mostrar o primeiro caso: sejam $s < t$. Então existe $c \in (s, t)$ tal que $f(t) - f(s) = f'(c).(t - s) > 0$.

Exercício

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
3. $x = \frac{t}{1+t^2}$
4. $f(x) = (\ln x)/x$

Dois teoremas sem demonstrações

Teorema (do valor intermediário)

Se f for contínua em $[a, b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um cin$]a, b[$ tal que $f(c) = \gamma$.

Consequência importante: se $f(a) < 0, f(b) > 0$ e f contínua em $[a, b]$ então existe $\gamma \in]a, b[$ tal que $f(\gamma) = 0$.

Teorema

Se f for contínua em $[a, b]$ então exisirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. (Isto é $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$, e $f(x_2)$ é o valor máximo)

Mais consequências do teorema do valor medio

Exercício ($e^x \to \infty$ mais rapidamente que x)

1. *Mostrar* $e^x > x$ *para todo* $x \geq 0$
2. *Mostre que* $e^x > (x^2)/2$ *para todo* $x \geq 0$
3. *Mostre que* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exercício

Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ *admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.*

Máximo, mínimo local

Definição

1. *Uma função f tem um máximo local em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.*
2. *Uma função f tem um mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.*

Como reconhecer um máximo ou mínimo local para f derivavel:

Teorema

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Definição

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Exercício

Encontre os números críticos:

$$f(x) = 4 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}x^2$$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$$

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$$

$$g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$$

$$g(t) = |3t - 4|$$

$$g(y) = \frac{y - 1}{y^2 - y + 1}$$

$$h(p) = \frac{p - 1}{p^2 + 4}$$

$$h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$$

$$g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$$

Máximo absoluto (ou global)

Definição

Uma função f tem máximo absoluto (ou máximo global) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$. O número $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D_f. Também f tem um mínimo absoluto em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$, e o número $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D_f. Os valores máximo e mínimo de f são chamados valores extremos de f.

Como determinar os valores extremos de f contínua em $[a,b]$ fechado:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a,b);
2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo (isto é, em a e b);
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Encontre os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f

Exercício

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leqslant 3$$

$$f(x) = 2 - \tfrac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$$

$$f(x) = 1/x, \quad x \geqslant 1$$

$$f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$$

$$f(x) = \sin x, \quad 0 \leqslant x < \pi/2$$

$$f(x) = \sin x, \quad 0 < x \leqslant \pi/2$$

$$f(x) = \sin x, \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$$

$$f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$$

$$f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$$

$$f(x) = |x|$$