MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 15/ Sexta 04/04/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 14

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Monitoria na proxima semana:** Monitoria do dia 11.04.2014: vai ser na sala 04 bloco 06.
3. **No site:** lista 3 (e respostas) + lista de tópicos para Prova 1
4. **Prova 1**: lembra que a Prova 1 é na Terça 08/04, horario habitual, sala habitual (isto é 21:00 até 22:40).
5. **Função diferenciavel (=derivavel)**
6. **Regras de diferenciação:**regra da soma, do produto, do quociente.
7. **Derivada de** e^x: $(e^x)' = e^x$.
8. **Derivadas do seno**

Revisão

Exercício

Calcule os limites:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+4x+1}-x$
4. $\lim_{x\to \infty} e^{x-x^2}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}$
6. *Encontre as assíntotas horizontais de* $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}$
7. $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos^2 x).(\text{sen}^2 x)}{x^4}$
8. $\lim_{x\to 4} \frac{2(x^3-64)}{\sqrt{x}-2}$
9. *Encontre as assíntotas verticais de* $y=\frac{2x+1}{x^2-2x-8}$
10. *Equação da reta tangente no ponto* $P(0,-1)$ *a curva* $y=\frac{x-1}{x+1}$

Regras de diferenciação

Teorema (Regra do produto)

Se f e g forem diferenciáveis, então:

$$(f.g)' = f'g + fg'$$

Teorema

Se g for diferenciável,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Teorema (Regra do quociente)

Se f eg forem deriváveis em p e se $g(p) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ sera derivável em p e,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2}$$

Exemplos

Exercício (Diferencie)

$$y = \frac{2x + 5}{3x - 2} \qquad z = \frac{4 - 3x}{3x^2 + x}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 0.5} \qquad f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$$

$$v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1} \qquad w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$$

$$f(s) = \frac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1} \qquad u = \frac{5x + 1}{2\sqrt{x}}$$

Derivada e sen, cos

Teorema

Mostrar:

$$(\text{sen}x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\text{sen}(x) \qquad (\text{tg}x)' = (\text{sec}x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Aplicação: $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x}$.

Exemplos

Exercício (Diferencie)

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$
2. $f(x) = \sqrt{x}\sin x$
3. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cot x$
4. $y = 2\sec x - \csc x$
5. $y = \sec\theta\,\tan\theta$
6. $g(\theta) = e^{\theta}(\tan\theta - \theta)$
7. $y = c\cos t + t^2\sin t$
8. $f(t) = \dfrac{\cot t}{e^t}$
9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$
10. $y = \sin\theta\cos\theta$
11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$
12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$
13. $y = \dfrac{t\sin t}{1 + t}$
14. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$
15. $f(x) = xe^x\csc x$
16. $y = x^2\sin x\tan x$

Derivadas superiores

Derivada segunda: se $y = f(x)$ for diferenciável, temos uma nova função $x \mapsto f'(x)$. Mas pode ser que essa função também é diferenciável, então $(f')' = f''$ existe e é chamada derivada segunda de f. Ou:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Exemplo fundamental: (posição)′=velocidade, (velocidade)′=aceleração, então: (posição)″=aceleração.
Lei de Newton:

$$m.\vec{a} = \vec{F}$$

onde $\vec{F}$ é a resultante de todas as forças aplicadas ao ponto.
Queda livre: $m.a = m.g \Rightarrow v(t) = gt + v_0$ e $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$.
Movimento harmônico simples: movimento de uma mola

$$\text{Lei de Hooke:} \qquad mx''(t) = -kx(t)$$

Exemplos

Exercício

Determine f', f'', f''' *para*

1. $f(x) = 4x^4 + 2x$
2. $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{x^3}$
3. $x.|x|$
4. e^x
5. $\cos x$
6. $\mathrm{sen} x$

Regra da cadeia: derivadas e funções compostas

Teorema

Se f e g forem diferenciáveis e $F = f \circ g$ for a função composta $F(x) = f(g(x))$, ento F é diferenciável e

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Na notação de Leibniz: se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções diferenciáveis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Prova: temos que estudar $\lim_{x\to a} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}$. Vamos introduzir:

$$Q(y) = \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)}, \text{ se } y \neq g(a) \text{ e } = f'(g(a)) \text{ se } y = g(a).$$

Agora é facil de ver que $\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}$ é sempre igual a $Q(g(x)).\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$. Depois podemos tomar o limite.

Exemplos

Exercício

Diferencie:

1. $R(z) = \sqrt{5z - 8}$
2. $\operatorname{sen}(3x^2 + x)$
3. $e^{w^4 - 3w^2 + 9}$
4. $\cos(t^4) + \cos^4(t)$
5. $(g(x))^2$, *onde g é derivavel.*
6. $e^{g(x)}$, *onde g é derivavel.*
7. $h(z) = \frac{2}{(4z + e^{-9z})^1 0}$

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + \sec x)^2}$

11. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$

12. $f(t) = \sin(e^t) + e^{\sin t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$

16. $y = e^{-2t} \cos 4t$

17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

22. $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$

23. $y = \sqrt{1 + 2e^{3x}}$

24. $y = 10^{1-x^2}$

25. $y = 5^{-1/x}$

26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$