MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 13/ Segunda 31/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 12

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Monitoria:** sala 02, bloco 06 (exceto dia 11.04.2014: sala 04, bloco 06), as sexta-feiras 17:00 as 19:00.
3. **Novo no site:** lista 3 (e respostas) + lista de tópicos para Prova 1
4. **Prova 1**: lembra que a Prova 1 é na Tera 08/04, horario habitual, sala habitual (isto é 21:00 até 22:40).
5. **Leis do limite:** no caso infinito.
6. **Assíntotas**: horizontais e verticais.
7. **Limite do tipo** $\frac{1}{f(x)}$ com $f(x) > 0$ e $f(x) \to 0^+$
8. **Derivadas:** definição de $f'(a)$ e equação da reta tangente à curva $y = f(x)$.

Lista de tópicos: incluida no site, em pdf

1. **Funções:** transformações de gráficos (por exemplo: translações, ...)
2. **Funções quadraticas, completamento de quadrado**.
3. **Desigualdades, valor absoluto**: não vai ter exercícios com desigualdades, mas a gente precisa da definição de $|x|$.
4. **Funções exponenciais e potênciais:** propriedades basicas.
5. **Limites:** definição rigorosa de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e de $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
6. **Limites:** leis do limite, formas indeterminadas.
7. **Exemplos de limites:** funções continuas, polinômios, frações racionais
8. **Limites e funções compostas**
9. **Limites no ∞:** polinômios, frações racionais, funções com raizes, etc ...
10. **Limites e funções trigonometricas** do tipo $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.
11. **Assíntotas**
12. **Exemplos de limites do tipo $\infty - \infty$:** exemplo $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+bx} - \sqrt{x^2+ax}$
13. **Derivadas:** definição de $f'(a)$, determinação da equação da reta tangente

Reta tangente a uma curva

Definição

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a,f(a))$ é a reta passando pelo ponto P e com inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que esse limite exista.

Isto é: equação da reta tangente:

$$\boxed{y - f(p) = f'(p).(x - p)}$$

Exemplo:

Exercício

tangente na curva $y = x^3$ no ponto $(1,1)$, e na curva $y = |x|$?

Derivada

Definição

A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$ ("f linha de a") é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existe.

Definição equivalente: podemos fazer $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \to 0$ implica $x \to a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercício

a)Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = (x-1)/(x-2)$ no ponto $(3, 2)$.b)Se $G(x) = x/(1+2x)$, encontre $G'(a)$

Velocidade: A variavel t é o tempo, e $t \mapsto f(t)$ é a função posição de um objeto. Entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição é de $f(a+h) - f(a)$, e

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Conseqüência: a derivada $f'(a)$ pode ser interpretada como uma velocidade instantânea (isto é , como um limite de velocidades médias).

Exemplo: queda livre, sem velocidade initial: Posição vertical: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$, e velocidade $v = -gt$, onde g é aceleração causada pela gravidade ($g \simeq 9,81 m/s^2$).

Notação: $f'(a)$ (notação de Lagrange), $\frac{df}{dx}(a)$ (de Leibniz), $\dot{f}(a)$ (de Newton)

Newton apoś a morte de Leibniz declarou: "me sinto muito feliz por ter desfeito o coração de Leibniz".

Taxa de variação instantânea: Para uma função $y = f(x)$, no intervalo $[x_1, x_2]$, a variação em x é $\Delta x = x_2 - x_1$, a variação correspondante em y é $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Finalmente:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a)$$

Economia: seja C o custo total de um produto, e Q a quantidade produzida. Então o **custo marginal Cmg** é:

$$Cmg = \frac{dC}{dQ}.$$

A ideia é que quando $\Delta x = 1$, mas Q muito grande (i.e muito maior que 1) temos que $C'(n) \simeq C(n+1) - C(n)$, isto é, o custo marginal de produção é mais o menos igual ao custo de produção de mais uma unidade.

Concentração: é a razão da quantidade de matéria do soluto (mol) pelo volume de solução (em litros)

$$M = \frac{n}{V},$$

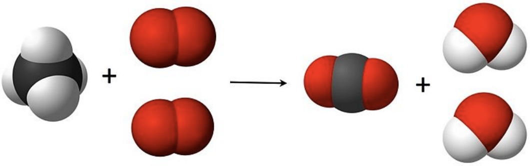
onde o mol é a unidade do Sistema SI de unidades. Isto é um mol é "a quantidade de matéria de um sistema que contém tantas elementos quanto são os átomos contidos em $0,012$ quilograma de carbono-12". Por exemplo, 1 mol de moléculas de um gás tem mais o menos $6,022 \times 10^{2}3$ moléculas deste gás ("constante de Avogadro"). Outro exemplo: Uma colher de chá tem mais o menos $0,3$ mol de água. **Notação:** concentração do reagente A é denotada com colchete, por $[A]$.

Derivadas na Química II

Equação química: uma representação de uma reação química

$$(Reagentes) \to (Produtos)$$

Por causa da Lei de conservação da massa, tem que equilibrar (i.e colocar coeficientes)



$$CH_4 \quad + \quad 2O_2 \longrightarrow CO_2 \quad + \quad 2H_2O$$

Metano + oxigénio $\to$ dióxido de carbono + agua + muito calor

Reações

Concentrações: dado $A + B \to C$, $[A], [B], [C]$ são funções do tempo t. A taxa média da reação do produto C no intervalo $[t_1, t_2]$ é $\frac{\Delta[C]}{\Delta t}$.
Taxa de reação instantânea:

$$\text{taxa de reação } = \frac{d[C]}{dt}$$

Caso mais geral: (condições: V constante) dada:

$$aA + bB \to pP + qQ$$

a **taxa de reação é:**

$$v = -\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{p}\frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{q}\frac{d[Q]}{dt}$$

Cinética química: a determinação experimental da taxa de reação r vai dar

$$r = k[A]^m[B]^n$$

(k constante de taxa de reação, mas pode depender por exemplo de T).

Química e equações diferenciais: no fim do semestre...

Exemplo: reação do tipo $aA \to Produtos$ no caso de uma reação de ordem 1 (i.e: $-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = k[A]$).
Equação diferencial $y' = 3.y$**:** a variavel é uma função y desconhecida. O objetivo é de encontrar todas as funções $y(x)$ que satisfazem

$$\frac{dy}{dx} = 3.y(x)$$

Exercício

Resolver (podemos supor: $\frac{de^t}{dt} = e^t$ *e* $f(t) = 0$ *para todos t implica f constante). (Resposta:* $[A] = [A]_0.e^{-akt}$*)*

Derivadas como funções

Definição

Uma função f é diferenciável (ou derivável) em a se $f'(a)$ existir. É diferenciável em um intervalo aberto (a, b) se for diferenciável em cada número do intervalo.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^3$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício

Mostrar que $f(x) = x^n$ (onde $n \in \mathbb{N}$) é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Exercício

Mostrar que $g(x) = \sqrt{x}$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e tal que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercicios com derivadas

Exercício

Encontre a derivada da função usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}$$

$$f(x) = mx + b$$

$$f(t) = 5t - 9t^2$$

$$f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$$

$$f(x) = x^2 - 2x^3$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$g(x) = \sqrt{9 - x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 3}$$

$$G(t) = \frac{1 - 2t}{3 + t}$$

$$f(x) = x^{3/2}$$

$$f(x) = x^4$$

Diferenciação e continuidade

Teorema

Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

Demonstração

Escrever, para todos $x \neq a$:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.(x - a) \to f(a). \lim_{x \to a}(x - a) = f'(a).0 = 0$$

Cuidado: tem funções continuas em 0, mas sem derivada (exemplo $y = |x|$).

Derivadas e funções usuais:

Teorema

Seja $n \neq 0$ um natural. Então temos:

- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.
- $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx.-n-1, x \neq 0$.
- $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, *onde* $x > 0$ *se* n *for par e* $x \neq 0$ *se* n *for impar e* $n \geq 2$.

Regras de diferenciação

Teorema (Regra do Múltiplo constante)

Se c for constante e f uma função diferenciável: $\frac{d}{dx}[cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$

Teorema (Regra da soma)

Se f e g forem diferenciáveis, então $(f+g)' = f' + g'$

Teorema (Regra da soma)

Se f e g forem diferenciáveis, então:

$$(f.g)' = f'g + fg'$$

Prova:simplesmente observar:

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \frac{f(x).(g(x) - g(a)) + (f(x) - f(a).g(a))}{x-a}$$

Conseqüências das regras de diferenciação

Exercício

Calcule a derivada de $P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 8.$

Exercício

Calcule a derivada de $f(x) = 3x.\sqrt{x} + 6x^4.$

Regra da recíproca e do quociente

Teorema

Se g for diferenciável,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Teorema (Regra do quociente)

Se f e g forem deriváveis em p e se $g(p) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ sera derivável em p e,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$$

Exemplos

Exercício (Diferencie)

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{x}{e^x}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

7. $g(x) = \dfrac{1 + 2x}{3 - 4x}$

8. $G(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1}$

9. $H(u) = \left(u - \sqrt{u}\right)\left(u + \sqrt{u}\right)$

10. $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

13. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \dfrac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$

16. $y = \dfrac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = e^p\left(p + p\sqrt{p}\right)$

18. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$