MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 12/ Sexta 28/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 11

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Monitoria da monitoria:** sala 02, bloco 06 (exceto dia 11.04.2014: sala 04, bloco 06), as sexta-feiras 17:00 as 19:00.
3. **Limites no infinito:** exemplo polinômios e frações racionais.
4. **Assíntotas horizontais e verticais**
5. **Um caso do tipo $\infty - \infty$:**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$$

6. **Leis do limite:** no caso infinito.

Programa Ensino Medio

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Programa Ensino Medio

Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas	
Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento.	• Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada. • Compreender a Matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo. A forma lógica dedutiva que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a Matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta. • Adquirir uma compreensão do mundo da qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações. • Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia.

Leis do limite: com limites infinitos

Somas:

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
3. $L + (+\infty) = +\infty$, se $L \in \mathbb{R}$
4. $L + (-\infty) = -\infty$, se $L \in \mathbb{R}$

Produtos:

1. $(+\infty).(+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty).(-\infty) = +\infty$
3. $(-\infty).(+\infty) = -\infty$
4. $L.(+\infty) = +\infty$, se $L > 0$
5. $L.(+\infty) = -\infty$, se $L < 0$
6. $L.(-\infty) = -\infty$, se $L > 0$
7. $L.(-\infty) = +\infty$, se $L < 0$

Indeterminações:

$$+\infty - (+\infty), -\infty - (-\infty), 0.\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}.$$

Lista

1. **Polinômios e frações racionais:**
2. **Funções constantes** com $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda \end{array}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$$

3. **Monomiais: do tipo** x^n

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$

- em $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

- em $-\infty$

$$\text{Para n par } \lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$$

$$\text{Para n impar } : \lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$$

Lista 2

1. **E os inversos**

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x^n} \end{array}$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$

- em $\pm\infty$:$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- em 0 as funções não são definidas:
- para n par: $\lim_{x\to0, x\neq0} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- para n impar:

$$\lim_{x\to0, x<0} \frac{1}{x^n} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0, x>0} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

2. **Polinômios** Os limites $\lim_{x\to\pm\infty}$ de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com $a_n \neq 0$ são os mesmos que os limites do termo dominante $a_n x^n$. Então: estudar $a_n x^n$ (e ver o sinal de a_n e se n é par ou impar).

1. **Potencias positivas**

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$$

com $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$$

Caso particular: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ então $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

2. **Potencias negativas**

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$$

, com $\alpha < 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$$

Lista 4

1. **Logaritmo**

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

$$\lim_{x \to 0, x>0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

2. **Logaritmo de base** a com $a > 0$

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \log_a(x) \end{array}$$

- base $a > 1$:

$$\lim_{x \to 0, x>0} \log_a(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$$

- base $a < 1$:

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$$

Lista 5

1. **Função exponencial**

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^x \end{array}$$

   - $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
   - $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2. **Função exponencial de base** a com $a > 0$

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & a^x = e^{x\ln a} \end{array}$$

   - $a > 1$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

   - $a < 1$:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

1. **Funções trigonometricas:**
Tangente:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Observação:$\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi - \dfrac{\pi}{2}; k\pi + \dfrac{\pi}{2} \right[$

Para todos inteiros $k \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2} + k\pi, x > -\frac{\pi}{2} + k\pi} \tan(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\frac{\pi}{2} + k\pi, x < +\frac{\pi}{2} + k\pi} \tan(x) = +\infty$$

Cotangente

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \end{array}$$

Observação :$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi; (k+1)\pi[$

Para todos inteiros $k \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{\substack{x\to k\pi \\ x>k\pi}} \cot(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to (k+1)\pi \\ x<(k+1)\pi}} \cot(x) = +\infty$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4} \right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2-1} \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3} + x \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2+3x-2} \right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2-x} - 3x \right)$$

Como trabalhar com limites infinitos: quocientes

Teorema

Suponha que $\lim_{x\to p^+} = 0$ *e que existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para* $p < x < p + r$. *Então:*

$$\lim_{x\to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Exemplo (importante): Para qualquer numero racional $r = \frac{p}{q} > 0$ temos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Exercício

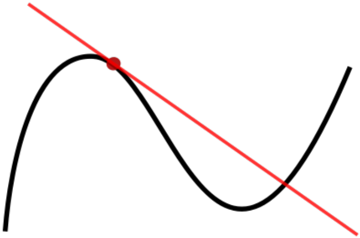
$\lim_{x\to 2^-} \frac{-4}{x+2}$

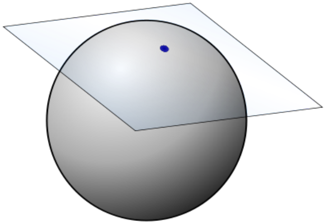
Exercício

$\lim_{x\to 4^-} \frac{3}{(4-x)^3}$ *e* $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{(x-3)}$

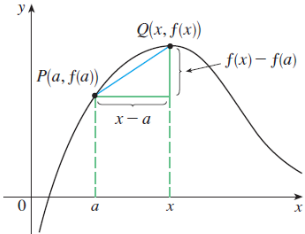
Tangentes

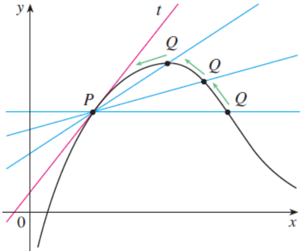
Ideia: "tangente", do latim *tangere* = tocar.





Posição limite de uma reta passando pelo ponto P:





Reta tangente a uma curva

Definição

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a,f(a))$ é a reta passando pelo ponto P e com inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que esse limite exista.

Exemplo:

Exercício

tangente na curva $y = x^3$ no ponto $(1,1)$.

Exemplo onde a tangente não existe:

Exercício

Estudar as tangentes para a curva $y = |x|$, em qualquer ponto P da curva.

Derivada

Definição

A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$ ("f linha de a") é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existe.

Definição equivalente: podemos fazer $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \to 0$ implica $x \to a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercício

a)Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = (x-1)/(x-2)$ no ponto $(3,2)$.b)Se $G(x) = x/(1+2x)$, encontre $G'(a)$

Velocidade: A variavel t é o tempo, e $t \mapsto f(t)$ é a função posição de um objeto. Entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição é de $f(a+h) - f(a)$, e

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Conseqüência: a derivada $f'(a)$ pode ser interpretada como uma velocidade instantânea (isto é , como um limite de velocidades médias).

Exemplo: queda livre, sem velocidade initial: Posição vertical: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$, e velocidade $v = -gt$, onde g é aceleração causada pela gravidade ($g \simeq 9,81 m/s^2$).

Notação: $f'(a)$ (notação de Lagrange), $\frac{df}{dx}(a)$ (de Leibniz), $\dot{f}(a)$ (de Newton)

Newton apoś a morte de Leibniz declarou: ”me sinto muito feliz por ter desfeito o coração de Leibniz”.

Interpretação da derivada

Taxa de variação instantânea: Para uma função $y = f(x)$, no intervalo $[x_1, x_2]$, a variação em x é $\Delta x = x_2 - x_1$, a variação correspondante em y é $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Finalmente:

$$\boxed{\text{taxa de variação instantânea } = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a)}$$

Economia: seja C o custo total de um produto, e Q a quantidade produzida. Então o **custo marginal Cmg** é:

$$Cmg = \frac{dC}{dQ}.$$

A ideia é que quando $\Delta x = 1$, mas Q muito grande (i.e muito maior que 1) temos que $C'(n) \simeq C(n+1) - C(n)$, isto é, o custo marginal de produção é mais o menos igual ao custo de produção de mais uma unidade.

Derivadas na Química

Concentração: é a razão da quantidade de matéria do soluto (mol) pelo volume de solução (em litros)

$$M = \frac{n}{V},$$

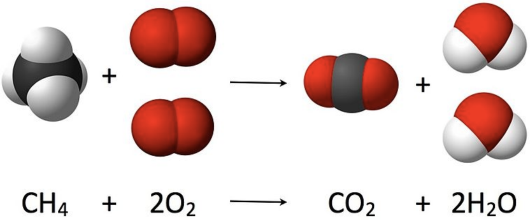
onde o mol é a unidade do Sistema SI de unidades. Isto é um mol é "a quantidade de matéria de um sistema que contém tantas elementos quanto são os átomos contidos em $0,012$ quilograma de carbono-12". Por exemplo, 1 mol de moléculas de um gás tem mais o menos $6,022 \times 10^2 3$ moléculas deste gás ("constante de Avogadro"). Outro exemplo: Uma colher de chá tem mais o menos $0,3$ mol de água. **Notação:** concentração do reagente A é denotada com colchete, por $[A]$.

Derivadas na Química II

Equação química: uma representação de uma reação química

$$(Reagentes) \rightarrow (Produtos)$$

Por causa da Lei de conservação da massa, tem que equilibrar (i.e colocar coeficientes)



Metano + oxigénio → dióxido de carbono + agua + muito calor

Reações

Concentrações:dado $A + B \to C$, $[A], [B], [C]$ são funções do tempo t. A taxa média da reação do produto C no intervalo $[t_1, t_2]$ é $\frac{\Delta[C]}{\Delta t}$.
Taxa de reação instantânea:

$$\text{taxa de reação } = \frac{d[C]}{dt}$$

Caso mais geral: (condições: V constante) dada:

$$aA + bB \to pP + qQ$$

a **taxa de reação é:**

$$v = -\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{p}\frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{q}\frac{d[Q]}{dt}$$

Cinética química: a determinação experimental da taxa de reação r vai dar

$$r = k[A]^m[B]^n$$

(k constante de taxa de reação, mas pode depender por exemplo de T).

Exemplo:$aA \to Produtos$ no caso de uma reação de ordem 1 (i.e: $-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = k[A]$).

Exercício

Resolver (podemos supor: $\frac{de^t}{dt} = e^t$ *e* $f(t) = 0$ *para todos t implica f constante). (Resposta:* $[A] = [A]_0.e^{-akt}$*)*

Derivadas como funções

Definição

Uma função f é diferenciável em a se $f'(a)$ existir. É diferenciável em um intervalo aberto (a, b) se for diferenciável em cada número do intervalo.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^3$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício

Mostrar que $f(x) = x^n$ (onde $n \in \mathbb{N}$) é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Exercício

Mostrar que $g(x) = \sqrt{x}$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e tal que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercicios com derivadas

Exercício

Encontre a derivada da função usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

$f(x) = mx + b$

$f(t) = 5t - 9t^2$

$f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

$f(x) = x^2 - 2x^3$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$g(x) = \sqrt{9 - x}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 3}$$

$$G(t) = \frac{1 - 2t}{3 + t}$$

$f(x) = x^{3/2}$

$f(x) = x^4$