

MAT 2110 : Cálculo para Química

Aula 11/ Terça 25/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

- 1 **Site:** <http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html>
- 2 **Monitoria nessa semana:** começa nessa sexta: 18:00 até 19:00 (excepcionalmente).
- 3 **Sala da monitoria:** sala 02, bloco 06 (exceto dia 11.04.2014: sala 04, bloco 06), as sexta-feiras 17:00 as 19:00.
- 4 **Limites infinitos**
- 5 **Limites no infinito:** exemplo polinômios e frações racionais.
- 6 **Leis do limite:** no caso infinito.

1 Limites no infinito:

Definição

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ significa: "eu posso fazer $f(x)$ arbitrariamente perto de L , tomando x suficientemente grande."

Exemplos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2 **Leis do limite:** se $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L_1$ e $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L_2$, então:

$$f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L_1 + L_2 \text{ e também } f(x).g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L_1.L_2$$

3 **Lei do quociente:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{L_1}{L_2} \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Praticar com limites no infinito

Exercício

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{2x + 1}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 1}$$

$$19. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x)$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + x^5)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^2}{x^3 - x + 1}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 5}$$

$$20. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + 2 \cos 3x)$$

$$32. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$$

Límites infinitos

Definição (Límites do tipo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$)

Suponhamos que exista a tal que $]a, \infty) \subset \text{Dom}(f)$. Definimos:

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ significa:

para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ com $\delta > a$ tal que $x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ significa:

para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ com $\delta > a$ tal que $x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

Definição

Sejam $p \in \mathbb{R}$ e suponhamos que exista b tal que $]p, b[\subset \text{Dom}(f)$, então:

$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty$ significa:

para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ com $p + \delta < b$ tal que $p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.

Limits no ∞ de polinomiais e frações racionais

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x^3 + 7x - 15.$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 + 7x - 15.$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 7x - 15}{2x^2 + 8x + 1}.$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 7x - 15}{2x^4 + 8x + 1}.$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 7x - 15}{x^5 + 3x^2 - 1}.$$

Mais limites no infinito de frações racionais

$$13. f(x) = \frac{2x + 3}{5x + 7}$$

$$15. f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 3}$$

$$17. h(x) = \frac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$$

$$19. g(x) = \frac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$$

$$21. h(x) = \frac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$$

$$14. f(x) = \frac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$$

$$16. f(x) = \frac{3x + 7}{x^2 - 2}$$

$$18. g(x) = \frac{1}{x^3 - 4x + 1}$$

$$20. h(x) = \frac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$$

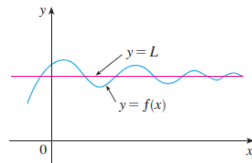
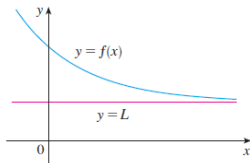
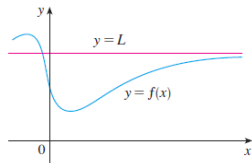
$$22. h(x) = \frac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$$

Assíntota horizontal:

Definição

A reta horizontal $y = L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se ou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$



Assíntotas verticais

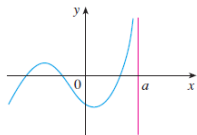
Assíntota vertical:

Definição

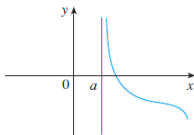
A reta vertical $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

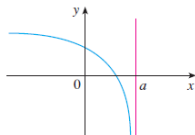
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



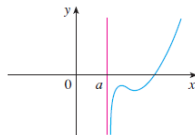
(a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$



(c) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

Exercício

Encontre as assíntotas horizontal e vertical de cada curva.

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2}$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

$$y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$$

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

$$y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$$

Variação: limites de frações com expoentes racionais

Exercício

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{8x^2 - 3}{2x^2 + x}}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - x^3}{x^2 + 7x} \right)^5$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{\sqrt{4x^2 + 25}}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{8x^2 - 3} \right)^{1/3}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 - 5x}{x^3 + x - 2}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6 + 9}}$$

Somas:

- 1 $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- 2 $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- 3 $L + (+\infty) = +\infty$, se $L \in \mathbb{R}$
- 4 $L + (-\infty) = -\infty$, se $L \in \mathbb{R}$

Produtos:

- 1 $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
- 2 $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- 3 $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
- 4 $L \cdot (+\infty) = +\infty$, se $L > 0$
- 5 $L \cdot (+\infty) = -\infty$, se $L < 0$
- 6 $L \cdot (-\infty) = -\infty$, se $L > 0$
- 7 $L \cdot (-\infty) = +\infty$, se $L < 0$

Indeterminações:

$$+\infty - (+\infty), -\infty - (-\infty), 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3} + x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2+3x-2})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2-x} - 3x)$$

Como trabalhar com limites infinitos: quocientes

Teorema

Suponha que $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = 0$ e que existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $p < x < p + r$. Então:

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Exemplo (importante): Para qualquer número racional $r = \frac{p}{q} > 0$ temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Exercício

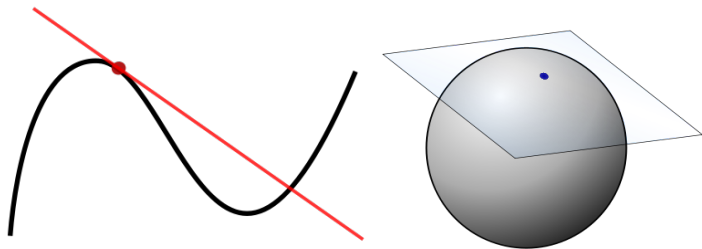
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-4}{x+2}$$

Exercício

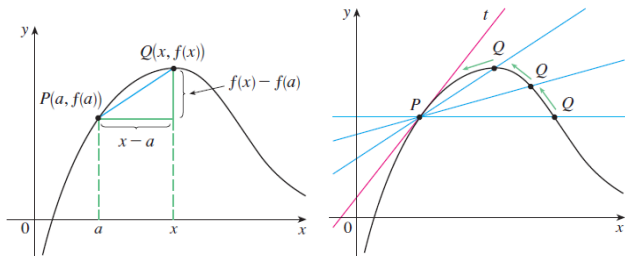
$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{(4-x)^3} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{(x-3)}$$

Tangentes

Ideia: "tangente", do latim *tangere* = tocar.



Posição limite de uma reta passando pelo ponto P:



Reta tangente a uma curva

Definição

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando pelo ponto P e com inclinação

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que esse limite exista.

Exemplo:

Exercício

tangente na curva $y = x^3$ no ponto $(1, 1)$.

Exemplo onde a tangente não existe:

Exercício

Estudar as tangentes para a curva $y = |x|$, em qualquer ponto P da curva.

Definição

A derivada de uma função f em um número a , denotada por $f'(a)$ ("f linha de a") é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existe.

Definição equivalente: podemos fazer $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \rightarrow 0$ implica $x \rightarrow a$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercício

a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = (x - 1)/(x - 2)$ no ponto $(3, 2)$. b) Se $G(x) = x/(1 + 2x)$, encontre $G'(a)$

Interpretações da derivada

Velocidade: A variável t é o tempo, e $t \mapsto f(t)$ é a função posição de um objeto. Entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição é de $f(a + h) - f(a)$, e

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Conseqüência: a derivada $f'(a)$ pode ser interpretada como uma velocidade instantânea (isto é, como um limite de velocidades médias).

Exemplo: queda livre, sem velocidade inicial: Posição vertical: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$, e velocidade $v = -gt$, onde g é aceleração causada pela gravidade ($g \simeq 9,81m/s^2$).

Notação: $f'(a)$ (notação de Lagrange), $\frac{df}{dx}(a)$ (de Leibniz), $\dot{f}(a)$ (de Newton)

Newton após a morte de Leibniz declarou: "me sinto muito feliz por ter desfeito o coração de Leibniz".

Interpretação da derivada

Taxa de variação instantânea: Para uma função $y = f(x)$, no intervalo $[x_1, x_2]$, a variação em x é $\Delta x = x_2 - x_1$, a variação correspondente em y é $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Finalmente:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a)$$

Economia: seja C o custo total de um produto, e Q a quantidade produzida. Então o **custo marginal C_{mg}** é:

$$C_{mg} = \frac{dC}{dQ}.$$

A ideia é que quando $\Delta x = 1$, mas Q muito grande (i.e muito maior que 1) temos que $C'(n) \simeq C(n+1) - C(n)$, isto é, o custo marginal de produção é mais o menos igual ao custo de produção de mais uma unidade.

Concentração: é a razão da quantidade de matéria do soluto (mol) pelo volume de solução (em litros)

$$M = \frac{n}{V},$$

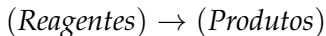
onde o mol é a unidade do Sistema SI de unidades. Isto é um mol é "a quantidade de matéria de um sistema que contém tantas elementos quanto são os átomos contidos em 0,012 quilograma de carbono-12".

Por exemplo, 1 mol de moléculas de um gás tem mais o menos $6,022 \times 10^{23}$ moléculas deste gás ("constante de Avogadro").

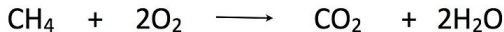
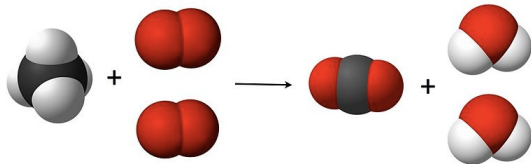
Outro exemplo: Uma colher de chá tem mais o menos 0,3 mol de água.

Notação: concentração do reagente A é denotada com colchete, por $[A]$.

Equação química: uma representação de uma reação química



Por causa da Lei de conservação da massa, tem que equilibrar (i.e. colocar coeficientes)



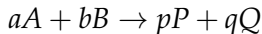
Metano + oxigénio \rightarrow dióxido de carbono + água + muito calor

Concentrações: dado $A + B \rightarrow C$, $[A]$, $[B]$, $[C]$ são funções do tempo t . A taxa média da reação do produto C no intervalo $[t_1, t_2]$ é $\frac{\Delta[C]}{\Delta t}$.

Taxa de reação instantânea:

$$\text{taxa de reação} = \frac{d[C]}{dt}$$

Caso mais geral: (condições: V constante) dada:



a taxa de reação é:

$$v = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{p} \frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{q} \frac{d[Q]}{dt}$$

Cinética química: a determinação experimental da taxa de reação r vai dar

$$r = k[A]^m[B]^n$$

(k constante de taxa de reação, mas pode depender por exemplo de T).

Exemplo: $aA \rightarrow \text{Produtos}$ no caso de uma reação de ordem 1 (i.e.: $-\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = k[A]$).

Exercício

Resolver (podemos supor: $\frac{de^t}{dt} = e^t$ e $f(t) = 0$ para todos t implica f constante). (Resposta: $[A] = [A]_0 \cdot e^{-akt}$)

Derivadas como funções

Definição

Uma função f é diferenciável em a se $f'(a)$ existir. É diferenciável em um intervalo aberto (a, b) se for diferenciável em cada número do intervalo.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^2$ é diferenciável em \mathbb{R} .

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^3$ é diferenciável em \mathbb{R} .

Exercício

Mostrar que $f(x) = x^n$ (onde $n \in \mathbb{N}$) é diferenciável em \mathbb{R} e tal que $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Exercício

Mostrar que $g(x) = \sqrt{x}$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e tal que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercícios com derivadas

Exercício

Encontre a derivada da função usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$$

$$f(t) = 5t - 9t^2$$

$$f(x) = x^2 - 2x^3$$

$$g(x) = \sqrt{9 - x}$$

$$G(t) = \frac{1 - 2t}{3 + t}$$

$$f(x) = x^4$$

$$f(x) = mx + b$$

$$f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 3}$$

$$f(x) = x^{3/2}$$