# MAT 2110 : Cálculo para Química

## Aula 10/ Segunda 24/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

# Resumo Aula 9

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Limites no infinito :**
$$\lim_{x\to-\infty} 3x^5+10x-2$$
3. **Limites de frações com expoentes racionais:**
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^{2/3}+10x-2x^2}{\sqrt{x}+8x+1}$$
4. **Assíntotas horizontais:**
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5+10x-2}{x^5+8x+1}$$
5. **Assíntotas verticais:**
$$f(x)=\frac{x^2+3x+1}{4x^2-9}$$
6. **Limites de diferencias:tipo** $\infty-\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2-x}-3x$$

# Resumo II

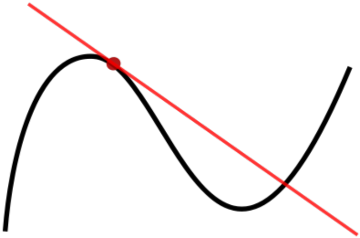
1. **Como trabalhar com quocientes**: $\lim_{x\to p^+} = 0$ e existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $p < x < p + r$. Então:

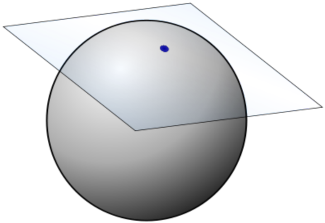
$$\lim_{x\to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

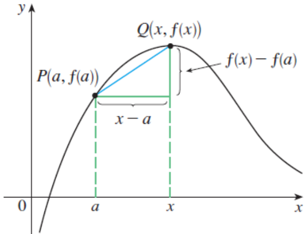
# Tangentes

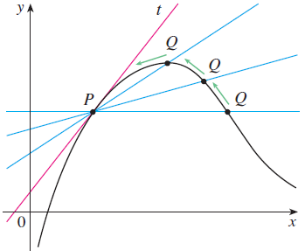
**Ideia:** "tangente", do latim *tangere* = tocar.





**Posição limite de uma reta passando pelo ponto P:**



## Definição

*A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a,f(a))$ é a reta passando pelo ponto $P$ e com inclinação*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

*desde que esse limite exista.*

**Exemplo:**

## Exercício

*tangente na curva $y = x^3$ no ponto $(1,1)$.*

**Exemplo onde a tangente não existe:**

## Exercício

*Estudar as tangentes para a curva $y = |x|$, em qualquer ponto $P$ da curva.*

# Derivada

## Definição

*A derivada de uma função $f$ em um número $a$, denotada por $f'(a)$ ("$f$ linha de $a$") é*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

*se o limite existe.*

**Definição equivalente:** podemos fazer $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \to 0$ implica $x \to a$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

## Exercício

*a)Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = (x-1)/(x-2)$ no ponto $(3,2)$.b)Se $G(x) = x/(1+2x)$, encontre $G'(a)$*

## Interpretações da derivada

**Velocidade:** A variavel $t$ é o tempo, e $t \mapsto f(t)$ é a função posição de um objeto. Entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição é de $f(a+h) - f(a)$, e

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

**Conseqüência:** a derivada $f'(a)$ pode ser interpretada como uma velocidade instantânea (isto é , como um limite de velocidades médias).

**Exemplo: queda livre, sem velocidade initial:** Posição vertical: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$, e velocidade $v = -gt$, onde $g$ é aceleração causada pela gravidade ($g \simeq 9,81 m/s^2$).

**Notação:** $f'(a)$ (notação de Lagrange), $\frac{df}{dx}(a)$ (de Leibniz), $\dot{f}(a)$ (de Newton)

Newton apoś a morte de Leibniz declarou: ”me sinto muito feliz por ter desfeito o coração de Leibniz”.

**Taxa de variação instantânea:** Para uma função $y = f(x)$, no intervalo $[x_1, x_2]$, a variação em $x$ é $\Delta x = x_2 - x_1$, a variação correspondante em $y$ é $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Finalmente:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a)$$

**Economia:** seja $C$ o custo total de um produto, e $Q$ a quantidade produzida. Então o **custo marginal Cmg** é:

$$Cmg = \frac{dC}{dQ}.$$

A ideia é que quando $\Delta x = 1$, mas $Q$ muito grande (i.e muito maior que 1) temos que $C'(n) \simeq C(n+1) - C(n)$, isto é, o custo marginal de produção é mais o menos igual ao custo de produção de mais uma unidade.

# Derivadas na Química

**Concentração:** é a razão da quantidade de matéria do soluto (mol) pelo volume de solução (em litros)

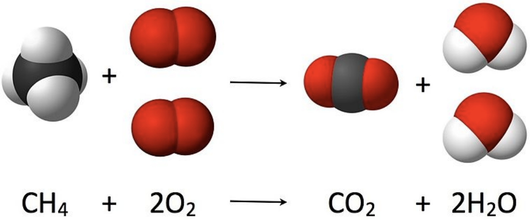
$$M = \frac{n}{V},$$

onde o mol é a unidade do Sistema SI de unidades. Isto é um mol é ”a quantidade de matéria de um sistema que contém tantas elementos quanto são os átomos contidos em $0,012$ quilograma de carbono-12”. Por exemplo, 1 mol de moléculas de um gás tem mais o menos $6,022 \times 10^2 3$ moléculas deste gás (”constante de Avogadro”). Outro exemplo: Uma colher de chá tem mais o menos $0,3$ mol de água. **Notação:** concentração do reagente $A$ é denotada com colchete, por $[A]$.

**Equação química:** uma representação de uma reação química

$$(Reagentes) \to (Produtos)$$

Por causa da Lei de conservação da massa, tem que equilibrar (i.e colocar coeficientes)




Metano + oxigénio $\to$ dióxido de carbono + agua + muito calor

**Concentrações:**dado $A+B\to C$, $[A],[B],[C]$ são funções do tempo $t$. A taxa média da reação do produto $C$ no intervalo $[t_1,t_2]$ é $\frac{\Delta[C]}{\Delta t}$.
**Taxa de reação instantânea:**

$$\text{taxa de reação } = \frac{d[C]}{dt}$$

**Caso mais geral:** (condições: V constante) dada:

$$aA+bB\to pP+qQ$$

a **taxa de reação é:**

$$v=-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt}=-\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt}=\frac{1}{p}\frac{d[P]}{dt}=\frac{1}{q}\frac{d[Q]}{dt}$$

Cinética química: a determinação experimental da taxa de reação $r$ vai dar

$$r=k[A]^m[B]^n$$

($k$ constante de taxa de reação, mas pode depender por exemplo de T).

**Exemplo:**$aA \rightarrow Produtos$ no caso de uma reação de ordem 1 (i.e: $-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = k[A]$).

### Exercício

*Resolver (podemos supor:* $\frac{de^t}{dt} = e^t$ *e* $f(t) = 0$ *para todos* $t$ *implica* $f$ *constante). (Resposta:* $[A] = [A]_0.e^{-akt}$*)*

# Derivadas como funções

## Definição

*Uma função $f$ é diferenciável em $a$ se $f'(a)$ existir. É diferenciável em um intervalo aberto $(a, b)$ se for diferenciável em cada número do intervalo.*

## Exercício

*Mostrar que $x \mapsto x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.*

## Exercício

*Mostrar que $x \mapsto x^3$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.*

## Exercício

*Mostrar que $f(x) = x^n$ (onde $n \in \mathbb{N}$) é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x) = n.x^{n-1}$.*

## Exercício

*Mostrar que $g(x) = \sqrt{x}$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e tal que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.*

# Exercicios com derivadas

## Exercício

*Encontre a derivada da função usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.*

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}$$

$$f(x) = mx + b$$

$$f(t) = 5t - 9t^2$$

$$f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$$

$$f(x) = x^2 - 2x^3$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$g(x) = \sqrt{9 - x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 3}$$

$$G(t) = \frac{1 - 2t}{3 + t}$$

$$f(x) = x^{3/2}$$

$$f(x) = x^4$$