MAT 0143 : Cálculo para Ciências Biológicas

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Informações gerais

- **Prof.:** Sylvain Bonnot
- **Email:** sylvain@ime.usp.br
- **Minha sala:** IME-USP, 151-A (Bloco A)
- **Site:** ver o link para MAT 143 na pagina `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
  Nessa página: as notas de aulas, informações gerais, listas de exercícios (com soluções...), etc...

- **Monitor:** aguardando para ver se tem um...
- **Avaliação:** mais detalhes depois, sobre as provas (local e horário, etc...)

Objetivo

Estudar as funções de uma variável real e as aplicações ás ciências biológicas.

Programa resumido

- Funções elementares de uma variável real; função exponencial e função logarítmica; funções trigonométricas. Noções de limite e continuidade.
- Derivada e diferencial; regras de derivação; taxa de variação; aplicações ás ciências biológicas.
- Teorema do valor médio e aplicaç ões. Estudo de funções: crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, concavidade, pontos de inflexão e assíntotas.
- Integral indefinida e integral definida. Técnicas de integração. Teorema Fundamental do Cálculo e Aplicações.
- Noções de equações diferenciais e aplicações ás ciências biológicas.

Observação 1: $\leq$ 1850 do ponto de vista da matemática... mas as aplicações são bem mais recentes...

Bibliografia

- J. Stewart. CÁLCULO, volume I, Editora Pioneira - Thomson Learning, São Paulo 2001.
- Hughes-Hallett, D et alii, CÁLCULO, volume I, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1999.
- E. Batschelet, INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA PARA BIOCIENTISTAS, EDUSP, 1978.
- P. Boulos, INTRODUÇÃO AO CÁLCULO, vols. I-II, Edgard Blücher, 1973-78.
- S.I. Grossman, J.E. Turner, MATHEMATICS FOR THE BIOLOGICAL SCIENCES, MacMillan, New York, 1974

- Qualquer livro que parece ajudar,
- Notas do web,
- Aulas do youtube, artigos da wikipedia,
- **Minhas notas de aulas, no meu site...**

Motivação e exemplos: porque estudar cálculo?

Modelos: descrever uma situação complexa com uma função matemática (util para fazer previsões por exemplo).

1. **Tsunami:** depois de um terremoto, a velocidade de um tsunami é dada por $v = 11.24\sqrt{p}$ (em quilômetros por hora), onde p é a profundidade do mar. No Pacifico, onde a profundidade media é de 4500 metros, qual é a velocidade de um tsunami? (754 km/h)

Pergunta: quanto tempo antes da chegada do tsunami?

$$\text{Resposta:} t = \int_0^x \frac{1}{v(u)} du$$

Motivação e exemplos: mais modelos

1. **Um ano na vida de um cão equivale a 7 anos na vida de um homem:** bom, parece que a situação é mais complicada:

$$f(x) = \begin{cases} 15x & 0 \leq x \leq 1 \\ 15 + 9(x-1) & 1 < x \leq 2 \\ 24 + 4(x-2) & x > 2 \end{cases}$$

2. **Tamanho dos animais em relação com o tamanho de uma ilha:** para os animais de sangue frio (ectotérmicos):

$$\text{peso } y = 0.249x^{0.47},$$

onde x é o tamanho da ilha (ou continente, em km^2). Mas para os mamíferos, a formula é diferente:

$$y = 0.469x^{0.52}$$

Exercício: buscar o tamanho da ilha de Hawaii, do continente africano e ver se é verdade...

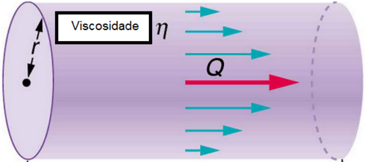
Mais modelos:

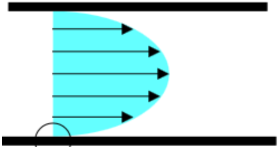
Lei de Poiseuille : para o fluxo de um líquido viscoso através de um tubo de cilíndrico de raio R (examplo: fluxo do sangue numa veia).
Velocidade: r á a distância até o centro da veia, R é o raio da veia, V a velocidade, e p, L, v são constantes aqui:

$$V = \frac{p}{4Lv}(R^2 - r^2)$$

Utilização de uma integral para calcular o fluxo total: (isto, é, qual é a quantidade de sangue que vai atraversar a veia, por segunda):

$$\boxed{\text{Fluxo total } = \int_0^R 2\pi \frac{p}{4Lv}(R^2 - r^2) r \, dr}$$

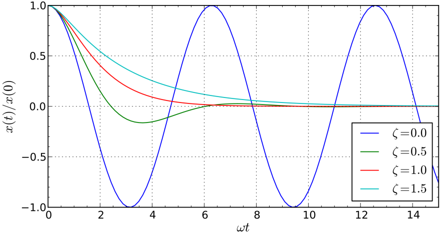




Modelos e equações diferenciais: movimento de uma mola, amortecimento

Equação diferencial : por exemplo, se $x(t)$ é a posição de um objeto, $v(t) = \frac{dx}{dt}$ a velocidade, e $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ a aceleração, um exemplo de equação diferencial seria:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

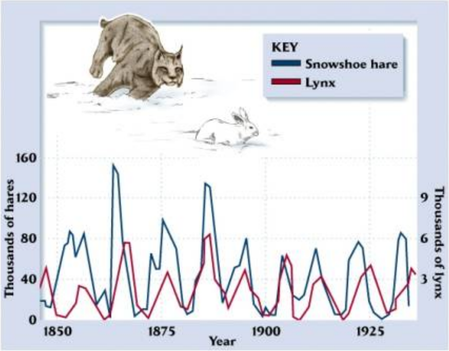


Ultimo exemplo: equações diferenciais e população

Equação de Lotka-Volterra : vamos estudar duas populações de animais: uma população de coelhos $x(t)$, e uma população de predatores dos coelhos (os "linces"), $y(t)$. Para saber qual é o predator:

Agora, a gente pude observar um fenômeno bizarro: uma periodicidade das populações. Como explicar isso?

Equação de Lotka-Volterra

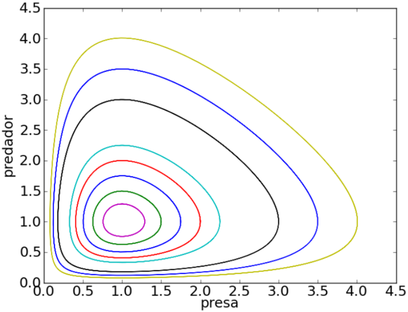


Modelo para a situação:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

Equação de Lotka-Volterra II

Para simplificar, vamos fazer $a = b = c = d = 1$.



Periodicidade: vem do fato que a curva $t \mapsto \binom{x(t)}{y(t)}$ é uma curva fechada. A gente pode mostrar que essa curva é dada pela equação seguinte:

$$\boxed{\ln(y) - y = -\ln(x) + x}$$

Números

- **Números naturais**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Podemos definir a adição $a + b$ dos números naturais, mas não podemos definir a subtração, porque $2 - 5$ não é um **natural**.
- **Números inteiros:** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (vem da palavra alemão "Zahlen"). Temos as operações de soma, subtração e multiplicação (o resultado é um inteiro). Problema: não existe um inteiro x tal que $3x = 5$. Ento temos que considerar um conjunto de numeros maior:
- **Números racionais**: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ com } b \neq 0 \right\}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ significa "a é elemento de $\mathbb{Z}$".
  Agora podemos finalmente definir as 4 operações. Na verdade os gregos como Pitágoras aceitavam somente os números racionais. Problema: Hipasus mostrou que tem números que não são racionais. Os outros estudantes de Pitágoras expulsaramHipasus da Escola e o afogaram no mar...

Necessidade dos números reais

Teorema

$\sqrt{2}$ não é um número racional.

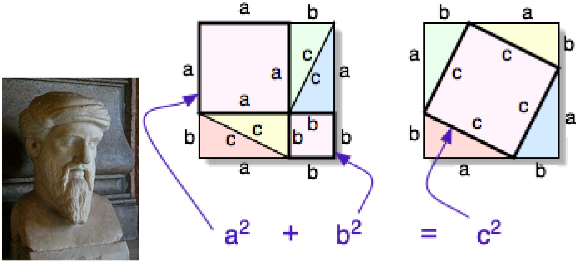


Figure : Pitágoras e o teorema de Pitágoras

Demonstração

Vamos supor a existência de um racional $\frac{p}{q}$ tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$,

Necessidade dos números reais II

Demonstração

e tal que a fração $\frac{p}{q}$ é **reduzida** *(significando: que não tem um inteiro que pode dividir p e q).*
Podemos ver que $p^2 = 2q^2$, então p tem que ser um número par (porque o quadrado de um número ímpar é ímpar). Isso significa que eu posso escrever $p = 2r$ (isto é exatamente a definição de um número par), mas então $p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, e eu obtenho:

$$4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2 \text{ (essa flecha significa "implica")},$$

OK, mas agora eu sei que q é um número par também, isto é, existe um inteiro s tal que $q = 2s$ (impossivel! porque eu poderia reduzir a fração $\frac{p}{q} = \frac{2r}{2s} = \frac{r}{s}$).

Números reais

- **Definição:** um número real é dado por um inteiro com sinal mais ou menos, mais uma virgula, mais um número finito ou infinito de casas decimais depois. Os números reais são os números da calculadora, mas com possibilidade de ter um número infinito de decimais.
- **Examplos** -351,121112211122211122 ... é um número real, π, $\sqrt{21}$ também ...
- **Convenção:** vocês já sabem que $23,99999999 = 24$. Na verdade, é facil mostrar isso:

Demonstração

Vamos escrever $x = 23,99999\ldots$. *Então* $10x = 239,9999\ldots$. *Depois de uma subtração, temos que* $9x = 239$, *mas isso significa que* $x = 24$.

- **Cuidado!** O número $23,88888888$ não é igual a $23,9$!
- **Notação:** o conjunto de todos os reais é $\mathbb{R}$.
- **Relação com os outros números:**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ onde } \subset \text{ significa "está contido"}$$

$\sqrt{2}$ é um número real ou não?

Teorema

Existe um número real, escrito $\sqrt{2}$, cujo quadrado é igual a 2.

Demonstração (idéia principal)

Vamos simplesmente construir o número real $\sqrt{2}$, com todas as decimais dele:

- **"Parte inteira":** *é claro que $1^2 = 1 < 2$, mas $2^2 = 4 > 2$, então $\sqrt{2}$ tem que ter uma parte inteira igual a 1.*
- **Primeira decimal depois da virgula:**

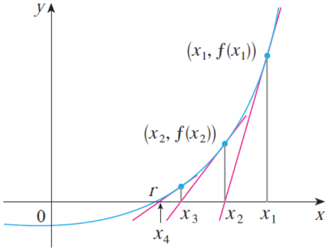
$$(1,3)^2 = 1,69 < (1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$$

  então $\sqrt{2}$ tem que começar com $1,4$.
- **Segunda decimal:** *$\sqrt{2}$ tem que começar com $1,41$ porque:*

$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0164$$

Conclusão:

- **Conclusão:** dessa maneira, a gente pode construir uma sequência infinita de decimais, isto é, um número real que vai ser exatamente $\sqrt{2}$.
- **Bem melhor: método de Newton para calcular** $\sqrt{2}$: queremos resolver $x^2 - 2 = 0$:



$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{cases}$$

$$1;\quad \frac{3}{2};\quad \frac{17}{12};\quad \frac{577}{408};\quad \frac{665857}{470832};\quad \frac{886731088897}{627013566048}$$

$1;\quad 1,5;\quad 1.416666667;\quad 1.414215686;\quad 1.414213562;\quad 1.41421356$

Reconhecer $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$

Teorema

Os números racionais tem uma expansão decimal periodica.

Demonstração

Vamos ver isso com um exemplo: frações do tipo $n/7$ *(por exemplo* $3/7$*).So tem um número finito de restos possivéis, então a sequência de decimais vai se repetir depois de um tempo.*

Exercício

Dar exemplos de números reais que não são racionais (e que não são raizes).

Depois de $\mathbb{R}$?Não é o fim da historia...

Definição

O conjunto $\mathbb{C}$ *dos números* **complexos** *é*

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\},$$

onde i satisfaz $i^2 = -1$.

- **Adição:** simplesmente

$$\boxed{(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i}$$

- **Produto:**

$$\boxed{\begin{aligned}(a + bi).(c + di) &= ac + adi + bi.c + (bi)(di) \\ &= ac + (ad + bc)i + (bd)(-1) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}}$$

Um pouco mais sobre $\mathbb{C}$

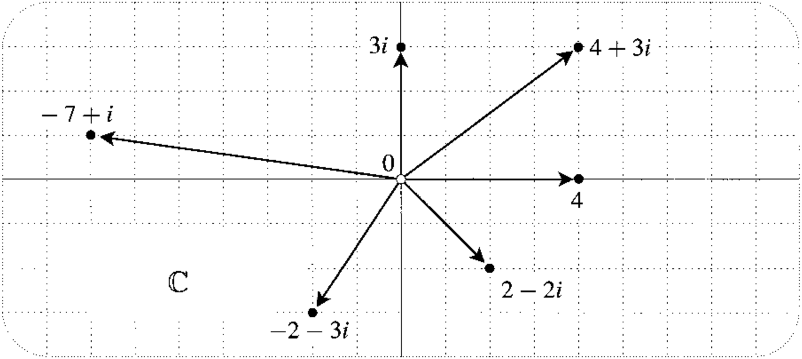
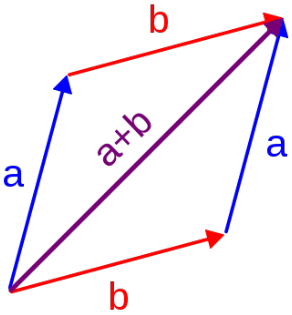
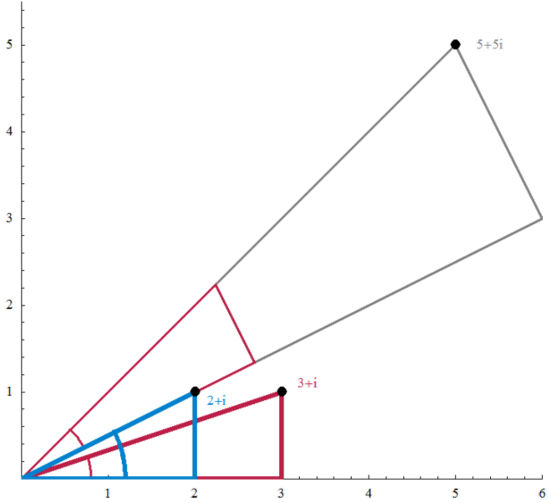


Figure : o plano complexo

Um pouco mais sobre $\mathbb{C}$: adição e produto em $\mathbb{C}$





Números e funções

Vamos considerar dois conjuntos: o conjunto X com elementos x e o conjunto Y com elementos y.

Definição

Uma **função** $f : X \to Y$ *(leia:"f de X em Y") é uma regra que associa a cada elemento x de X um único elemento y de Y.*

- **Domínio**: o conjunto X é o **domínio** de f, também escrito D_f.
- **Contradomínio**: o conjunto Y é o **contradomínio** de f.
- **Valor, imagem:** o único y de Y associado ao elemento x de X é indicado por $f(x)$ (leia: f de x), é o valor de f em x.
- **Imagem de f:** o conjunto de todos os valores possivéis de $f(x)$ é chamado a **imagem de** f.

Visualização de uma função:

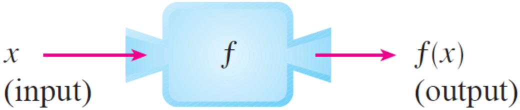


Figure : Função como uma maquina

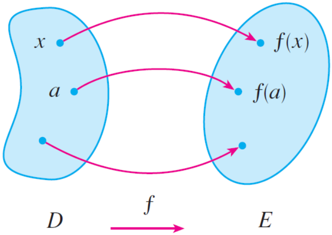


Figure : Diagrama de flechas

Gráfico de uma função

Definição

O **gráfico** *de f consiste em todos os pontos do plano com coordenadas $(x, f(x))$ onde x está no domínio de f.*

Examplos: $f : x \mapsto x^2, g : u \mapsto u^3 ...$

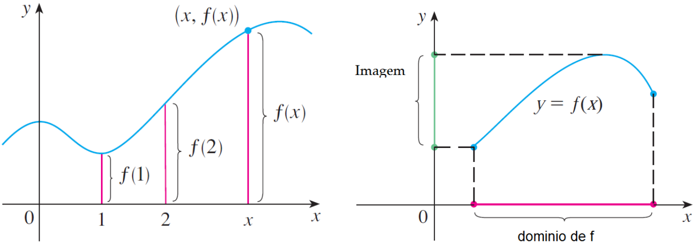
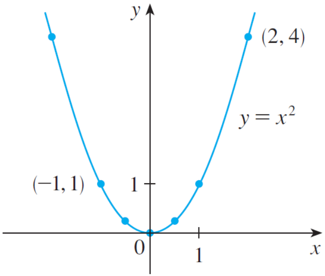


Figure : Exemplo de gráfico

Examplos

Examplo 1: Dominio e imagem de $f(x) = x^2$



Examplo 2: Encontre o domínio e a imagem de $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, de $g(x) = \sqrt{x-7}$.

Examplo 3: função afim E simplesmente uma função cujo gráfico é uma reta.

$$y = f(x) = mx + b,$$

onde m é o **coeficiente angular** ou **inclinação** e b é o **intercepto**.

Mais exemplos / Intervalos

Definição (Intervalo aberto)

O intervalo aberto de a até b, denotado pelo símbolo (a, b) *é definido por:*

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

Examplos: domínio de $\frac{x}{x^2-3}$

Definição (Intervalo fechado)

O intervalo fechado de a até b, denotado pelo símbolo $[a, b]$ *é definido por:*

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Exercício

Escrever a equação de uma função afim, dados dois pontos na reta. Equação de uma reta paralela a uma outra.

Desigualdades

Regras para as desigualdades:

- Se $a < b$ então $a + c < b + c$
- Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$
- Se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$
- Se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$
- Se $0 < a < b$ então $1/a > 1/b$

Exercício

Resolva as desigualdades seguintes e ilustre o conjunto solução sobre o eixo real:

1. $3x + 9 > 4$
2. $5x < 2x + 1 \leq 3x + 4$
3. $2x^2 + x \leq 1$
4. $x^2 + 2x + 3 < 1.$

Praticar com desigualdades

Exercício

Resolva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

Demonstração

Temos que escrever tudo de um lado

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0$$

e depois re-escrever como um produto de fatores simples:

$$x(x-1)(x+4) > 0.$$

Finalmente, podemos determinar as soluções da equação $x(x-1)(x+4) = 0$ *e cortar o eixo real em 4 intervalos:*

Praticar com desigualdades II

Intervalo	x	$x-1$	$x+4$	$x(x-1)(x+4)$
$x < -4$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-4 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x > 1$	$+$	$+$	$+$	$+$

Então o conjunto solução é :

$$\{x \mid -4 < x < 0 \text{ or } x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$

Valor absoluto

Definição

O valor absoluto (também chamado módulo) de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 sobre o eixo real.

- **Propriedade 1:** para todo número a, $|a| \geq 0$.
- **Propriedade 2:** $|a| = a$ se $a \geq 0$, e $|a| = -a$ se $a < 0$.
- **Propriedade 3:** $|a||b| = |ab|$.
- **Propriedade 4:** "Desigualdade triangular"

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

- **Propriedade 5:** vamos supor $a > 0$, então:

$$|x| = a \text{ se e somente se } x = \pm a$$

$$|x| < a \text{ se e somente se } -a < x < a$$

$$|x| > a \text{ se e somente se } x > a \text{ ou } x < -a.$$

Resolva:

$3x - 11 < 4$

$4 - 3x \geqslant 6$

$1 + 5x > 5 - 3x$

$1 < 3x + 4 \leqslant 16$

$-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$

$2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$

$(2x + 3)(x - 1) \geqslant 0$

$x^2 < 2x + 8$

$|x| \geqslant 3$

$|x - 6| < 0.1$

$|x + 1| \geqslant 3$

$|5x - 2| < 6$

$0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$

Exercicios com o valor absoluto

Exercício

Elimine o valor absoluto:

$$|2x - 1| + |x - 2|$$

$$|x - 2| - |x + 1|$$

Exercício

Demostrar:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Exercicios sobre gráficos

Exercício

O conjunto $\{(x, y) \mid 3x + 4y = 5\}$ *é o grafico de uma função?*

Exercício

Grafico de $f(x) = |x|$, *de* $|x - 6|$, *de* $2|x|$, *de* $|x| + 2$*?*