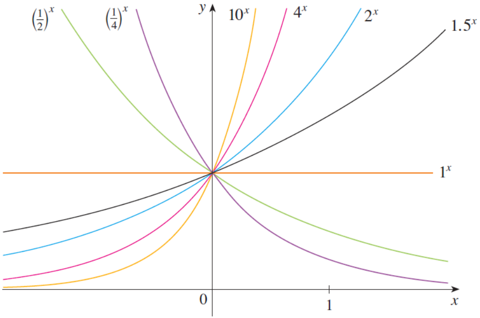
MAT 1351 : Cálculo I

Aula Quinta 26/04/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2018

Resumo: Derivada e exponencial



Escolha de e: o unico número tal que a reta tangente no ponto $(0,1)$ tem inclinação $= 1$. Mas isso significa: $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$.

Teorema

$$(e^x)' = e^x$$

Prova: $\frac{e^{a+h}-e^a}{h} = \frac{e^a.e^h-e^a}{h} = e^a.\frac{e^h-1}{h} \to e^a.1 = e^a$

Derivada e sen, cos

Exemplo: calcule a derivada de sen em 0 (Resposta: $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen} x}{x} = 1$).

Exercício

Mostrar:

$$(\mathrm{sen} x)' = \cos x$$

Prova:

$$\frac{\mathrm{sen}(x+h) - \mathrm{sen}(x)}{h} = \frac{\mathrm{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\mathrm{sen}(h) - \mathrm{sen}(h)}{h}$$

Mas isso é:

$$= \mathrm{sen}(x).\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x).\frac{\mathrm{sen}(h)}{h} \to \mathrm{sen}(x).0 + \cos(x).1$$

Exercício (Teorema a saber)

$$(\cos x)' = -\mathrm{sen}(x) \textit{ e também } (\mathrm{tg} x)' = (\sec x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Prova: tomar a derivada de $(\cos x)^2 + (\mathrm{sen} x)^2 = 1$!

Derivadas superiores

Derivada segunda: se $y = f(x)$ for diferenciável, temos uma nova função $x \mapsto f'(x)$. Mas pode ser que essa função também é diferenciável, então $(f')' = f''$ existe e é chamada derivada segunda de f. Ou:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Exemplo fundamental: (posição)′=velocidade, (velocidade)′=aceleração, então: (posição)″=aceleração.

Lei de Newton:

$$m.\vec{a} = \vec{F}$$

onde $\vec{F}$ é a resultante de todas as forças aplicadas ao ponto.

Queda livre: $m.a = m.g \Rightarrow v(t) = gt + v_0$ e $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$.

Movimento harmônico simples: movimento de uma mola

$$\text{Lei de Hooke:} \qquad mx''(t) = -kx(t)$$

Exemplos

Exercício

Determine f', f'', f''' para

1. $f(x) = 4x^4 + 2x$
   Resp. $f'(x) = 16x^3 + 2$ *e* $f''(x) = 48x^2, f^{(3)}(x) = 96x$.
2. $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{x^3}$
   Resp. $f'(x) = 3/x^4 + 10x; f''(x) = 10 - 12/x^5;$
   $f^{(3)}(x) = 60/x^6$
3. $x.|x|$
   Resp. $f'(x) = 2|x|$ *e* $f''(x)$ *no existe.*
4. e^x
   Resp. *para todo* $n \in \mathbb{N}$ $exp^{(n)}(x) = e^x$.
5. $\cos x$
   Resp. *a derivada n-ésima é* $\cos((n\pi)/2 + x), n \in \mathbb{N}$.
6. $\mathrm{sen} x$
   Resp. $(d^n sin(x))/(dx^n) = \mathrm{sen}((n\pi)/2 + x)$

Regra da cadeia: derivadas e funções compostas

Teorema

Se f e g forem diferenciáveis e $F = f \circ g$ for a função composta $F(x) = f(g(x))$, ento F é diferenciável e

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Na notação de Leibniz: se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções diferenciáveis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Prova: temos que estudar $\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}$. Vamos introduzir:

$$Q(y) = \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)}, \text{ se } y \neq g(a) \text{ e } = f'(g(a)) \text{ se } y = g(a).$$

Agora é fcil ver que $\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}$ é sempre igual a $Q(g(x)).\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$. Depois podemos tomar o limite.

Exemplos

Exercício

Diferencie:

1. $R(z) = \sqrt{5z - 8}$
2. $\operatorname{sen}(3x^2 + x)$
3. $e^{w^4 - 3w^2 + 9}$
4. $\cos(t^4) + \cos^4(t)$
5. $(g(x))^2$*, onde g é derivavel.*
6. $e^{g(x)}$*, onde g é derivavel.*
7. $h(z) = \frac{2}{(4z + e^{-9z})^{10}}$

Respostas:

1) $R'(z) = \frac{1}{2\sqrt{5z-8}}.(5)$
2) $\cos(3x^2 + x).(6x + 1)$
3) $e^{w^4 - 3w^2 + 9}.(4w^3 - 6w)$
4) $-\mathrm{sen}(t^4).4t^3 + 4\cos^3 t.(-\mathrm{sen} t)$
7) $-\frac{(20(4-9e^{-9z}))}{(4z+e^{-9z})^{11}}$

Regra da cadeia

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + \sec x)^2}$

11. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$

12. $f(t) = \sin(e^t) + e^{\sin t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$

16. $y = e^{-2t}\cos 4t$

17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

22. $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$

23. $y = \sqrt{1 + 2e^{3x}}$

24. $y = 10^{1 - x^2}$

25. $y = 5^{-1/x}$

26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

Regra da cadeia:exemplos

Derivada de $f(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4} = \sqrt{g(s)}$ onde $g(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4}$.
Temos :
$f'(s) = \frac{1}{2\sqrt{g(s)}}.g'(s)$. Mas $g'(s) = \frac{6s}{(s^2+4)^2}$,i.e

$$f'(s) = \frac{6s}{g(s)(s^2+4)^2}$$

Derivadas e funes inversas: derivada de $g = f^{-1}$

Teorema

Seja f uma função inversível, com função inversa g. Se f for derivável em $q = g(p)$, com $f'(q) \neq 0$, e se g for continua em p, então g será derivável em p (em particular isso acontece se g for diferenciável) e temos que

$$g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Prova: temos que

$$f(g(x) = x.$$

Podemos tomar a derivada:

$$f'(g(x).g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Exemplos

Arc seno: sen : $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ é continua e estritamente crescente, então existe uma inversa, chamada $arc \quad sen : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ com derivada

$$(arc\text{sen})'(x) = \frac{1}{\text{sen}'(arc\text{sen}x)} = \frac{1}{\cos(arc\text{sen}x)}$$

mas agora

$$[\cos(arcsenx)]^2 + [\text{sen}(arcsenx)]^2 = 1 \Rightarrow [\cos(arcsenx)]^2 + x^2 = 1$$

então $[\cos(arcsenx)] = \sqrt{1-x^2}$ e finalmente:

$$(arc\text{sen})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ para todo } -1 < x < 1$$

Exercício

Mostre que $(arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *e que* $(arc\cos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *para todo* $-1 < x < 1$.

Regra da cadeia: funções arc cos e arc sen

Exercício

Mostre que $(arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *e que*
$(arc\cos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *para todo* $-1 < x < 1$.

Resp.
$(arctg)'(x) = \frac{1}{(tg)'(arctg(x))} = \frac{1}{1+(tg)^2(arctg(x))} = \frac{1}{1+x^2}$
Para a outra, podemos re-fazer tudo, ou observar simplesmente que

$$(arccos)(x) + (arcsen)(x) = \pi/2$$

Regra da cadeia: funções arc cos e arc sen

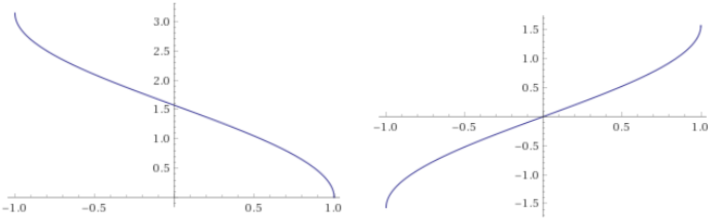


Figura : arc cos, e arc seno

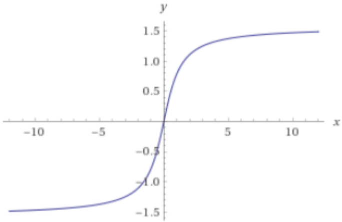


Figura : arctg(x)

Funções Logarítmicas e derivadas

Observação: para $a > 1$, $x \mapsto a^x$ é continua e crescente (ou decrescente), então existe uma função inversa chamada *função logaritmíca com base a*, denotada por $\log_a$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Propriedades I:

$$\log_a(a^x) = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \text{ para todo } x > 0$$

Propriedades II:

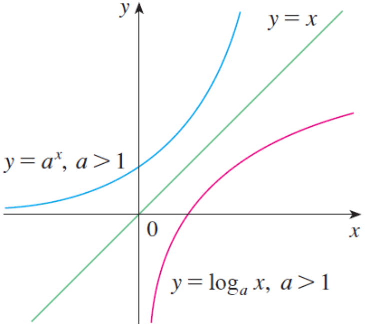
Teorema (Leis dos logaritmos)

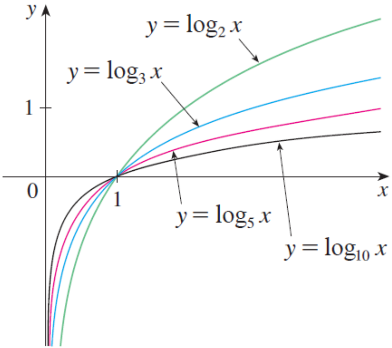
Se x e y forem > 0, então:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r.\log_a x$ *onde r é qualquer número real.*

Funções Logarítmicas II

Gráfico em relação à a^x:





Log e limites:

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \text{ e também } \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

Logaritmos naturais

Definição: $\log_e x = \ln x$
Propriedades I:

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

$$\ln(e^x) = x \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \text{ para } x > 0$$

Propriedades II: "Mudança de base"

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \text{ para todo } a > 0, a \neq 1$$

Teorema (Logaritmos e derivadas)

1. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$,
2. *Para todo* $x \in (0, \infty)$ $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
3. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \ln a$
4. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

Exemplos

Exercício

Determine a derivada:

1. $y = e^{3x}.arc\text{sen}(2x)$
   Resp. $y' = 3e^{3x}.arc\text{sen}(2x) + e^{3x}.\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}$
2. $y = x^2.e^{arctg(2x)}$.
   Resp. $y' = 2x.e^{arctg(2x)} + x^2.e^{arctg(2x)}.\frac{2}{1+4x^2}$
3. $y = e^{-3x} + \ln(arctgx)$
   Resp. $y' = -3e^{-3x} + \frac{1}{arctg(x)}.\frac{1}{1+x^2}$

Complemento sobre as equações diferenciais

A gente já encontrou as equaes $y' = y$ e $y'' = y$, sem resolver elas completamente...

Definição

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função y que aparece na equação também com as derivadas de y.

Exemplos: $y' = 3y + 1$, $y'' = -y$, $y.y' = 2y''$.
O primeiro teorema é muito intuitivo (a prova será feita mais tarde):

Teorema

As soluções da equação $y' = 0$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções constantes.

Teorema

As soluções da equação $y' = k.y$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções

$$y(t) = C.e^{kt}, \text{ onde } C \text{ é uma constante.}$$

Solução de $y' = ky$

Prova: E facil de ver que $y(t) = C.e^{kt}$ são soluções. Agora seja $g(t)$ uma solução. Vamos definir uma nova função

$$h(t) = g(t).e^{-kt}$$

Então
$h'(t) = g'(t).e^{-kt} + g(t)(-k.e^{-kt}) = kg(t)e^{-kt} - kg(t).e^{-kt} = 0.$
Isso implica que $h(t) = Constante = C$, e depois que $g(t) = C.e^{kt}$.

Exercício (Equação $y' = ky + b$, $k \neq 0$)

1. *dar um exemplo de solução.*
2. *Mudar de variavel: escolher uma função simples do tipo* $u = \alpha.y + \beta$ *para obter uma nova equação do tipo* $u' = K.u$
3. *resolver a equação original.*

Resp.

1. dar um exemplo de solução:
   Vamos tentar uma constante C: temos
   $0 = kC + b \Rightarrow C = -b/k$.
2. Mudar de variavel: escolher uma função simples do tipo $u = \alpha.y + \beta$ para obter uma nova equação do tipo $u' = K.u$
   Resp. Se y_1, y_2 são soluções da equação então
   $(y_1 - y_2)' = ky_1 + b - (ky_2 + b) = k(y_1 - y_2)$.
   Ento $u = y_1 - y_2$ é solução de $u' = ku$.
3. resolver a equação original.
   Resp. seja $u = y - C$, então $u(t) = De^{kt}$ e finalmente
   $y(t) = C + De^{kt}$ onde $C = -b/k$.

Aplicação: decaimento radioativo

Radioatividade: Um núcleo de um átomo vai se desintegrar de maneira espontânea, emitindo radiações (exemplo: emissão alfa, isto é, de uma particula alfa= 2 prótons e 2 nêutrons).
Fato experimental: a taxa de transformação de núcleos radioativos é proporcional ao número de átomos dos núcleos. Aqui $N(t)$ é o número de particulas (função do tempo):

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda.N(t)$$

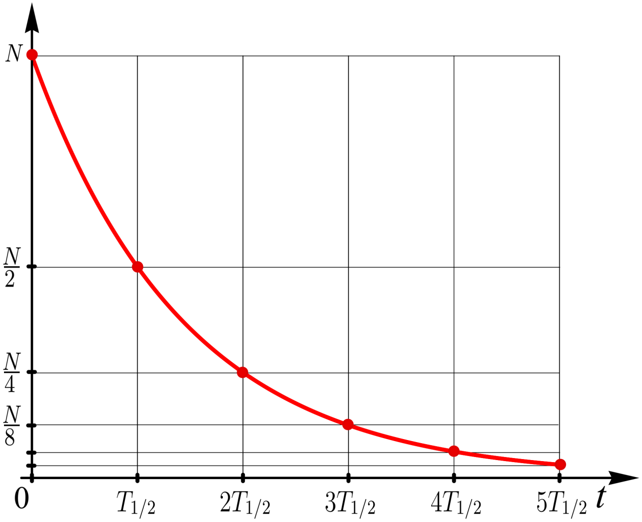
Resolução da equação:

$$N(t) = C.e^{-\lambda.t} = N_0.e^{-\lambda.t}$$

"Meia-vida" de um elemento: E o tempo necessário para desintegrar a metade da massa do material. Isto é, o tempo depois do qual a quantidade N de particulas se reduziu á metade. Ou seja:

$$N(\tau) = \frac{N_0}{2}$$

Decaimento e meia-vida



Decaimento II

Exercício

Mostre que a meia-vida é dada por:

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

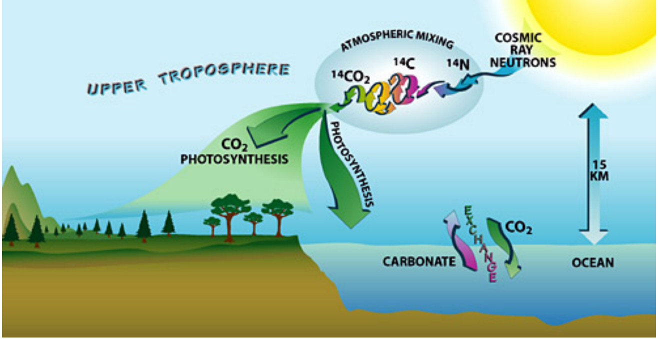
Temos que: $N(\tau) = N_0.e^{-\lambda.\tau}$ então
$N_0/2 = N_0.e^{-\lambda.\tau} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda.\tau}$. Podemos tomar o logaritmo natural:

$$\ln(1/2) = -\ln 2 = -\lambda.\tau \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Exemplos:para Carbono C^{14}, $\tau = 5730$ anos.

Aplicação:Datação por radiocarbono

Fato 1: A atmosfera contem uma proporção constante de $14 - C$.



Fato 2: plantas vivas contem uma proporção constante de $14 - C$ radioativo.

Aplicação:Datação por radiocarbono 2

A planta vai morrer: a fotossíntese para, e a quantidade de $14-C$ dentro da planta vai diminuir (decaimento radioativo)
Consequência: seja N_1 a quantidade que a planta deveria conter, e N_r a quantidade real.

$$N_r = N_1.e^{-\lambda.t} \Rightarrow t = 1\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_r}{N_1}\right)$$

Máximo, mínimo local

Definição

1. *Uma função f tem um máximo local em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.*
2. *Uma função f tem um mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.*

Como reconhecer um máximo ou mínimo local para f derivavel:

Teorema

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Definição

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Máximo absoluto (ou global), mínimo absoluto (ou global)

Teorema (Teorema do valor extremo)

Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor m áximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

Teorema de Rolle

Teorema (Teorema de Rolle)

Teorema de Rolle Teorema Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. *f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$*
2. *f é e derivável no intervalo aberto (a, b)*
3. *$f(a) = f(b)$,*

Então existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.