MAT 1351 : Cálculo I

Aula Quinta 17/05/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

Uso da segunda derivada

Concavidade:

Definição

Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo $I = (a, b)$, então ele é chamado côncavo para cima em I. Se o gráfico estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, ele é chamado côncavo para baixo em I.

Como determinar a concavidade:

Teorema

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f é côncavo para cima em I.*
2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.*

Exercício

Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão para:

$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ *e* $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

Uso da segunda derivada II

Definição

Um ponto P na curva $y = f(x)$ é um ponto de inflexão se f é continua e a função mudar de concavidade em P.

Observação: se a curva tiver uma tangente em P ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente em P.

Exercício

Demonstre que se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f e f'' for contínua então $f''(c) = 0$.

Mais uma aplicação:

Teorema (Teste da segunda derivada)

Suponha que f'' seja contínua perto de c.

1. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo local em c.*
2. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$ então f tem um máximo local em c.*

Exercício

Mostre o teste da segunda derivada.

Exercício

Encontre os valores de máximo e mínimo locais de f com o teste das derivadas primeira e depois o teste da derivada segunda, para

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}, \text{ e depois } g(x) = x + \sqrt{1-x}.$$

Utilização da segunda derivada

Exercício

Encontre os valores máximo e mínimo locais, utilizando o teste da segunda derivada.

1. $f(x) = x^5 - 5x + 3$
2. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
3. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

Exercício

Esboce o gráfico de uma função que satisfaça a todas as condições dadas: $f' > 0$ *se* $|x| < 2$, $f' < 0$ *se* $|x| > 2$, $f'(-2) = 0$, $\lim_{x\to 2} |f'(x)| = +\infty$, $f'' > 0$ *se* x *diferente de 2.*

Exercício

Mostre que a curva $y = (1+x)/(1+x^2)$ *tem 3 pontos de inflexão e todos ficam sobre uma mesma reta.*

Estudo geral de uma função

Exercício

Encontre as assíntotas verticais e horizontais. Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente. Encontre os valores máximos e mínimos locais. Use essas informações para esboçar o gráfico de f.

45. $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

46. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$

49. $f(x) = e^{-x^2}$

50. $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

51. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

52. $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

Intervalos de concavidade

Exercício

Mostre que a função $x.|x|$ *tem um ponto de inflexão na origem mas* $g''(0)$ *não existe.*

Exercício

Mostre que $f(x) = x^4$ *é tal que* $f''(0) = 0$ *mas* 0 *não é ponto de inflexão.*

Exercício

Para as funções da parte **estudo geral**, *encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.*

Regra de L'Hospital

Teorema

Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$
2. *Ou:* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$*,*

então;

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for $+\infty$ ou $-\infty$).

Demonstração: caso simples

Caso simples: $f(a) = g(a) = 0, f', g'$ contínuas com $g'(a) \neq 0$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

mas este limite é igual a;

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$