# MAT 1351 : Cálculo I

## Aula Terça 08/05/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

# Resumo:

- Máximo, mínimo local
- Máximo, mínimo global
- Teorema de Fermat, definição de numero crítico
- Teorema do valor extremo
- Teorema do valor intermediário
- Teorema de Rolle

# Teorema de Rolle

### Teorema (Teorema de Rolle)

*Seja $f$ uma funçao que satisfaça o seguinte:*

- *$f$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$,*
- *$f$ é diferenciável no intervalo aberto $(a, b)$,*
- *$f(a) = f(b)$,*

*então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

# Máximo absoluto (ou global): método do intervalo fechado

## Definição

*Uma função $f$ tem máximo absoluto (ou máximo global) em $c$ se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$. O número $f(c)$ é chamado valor máximo de $f$ em $D_f$. Também $f$ tem um mínimo absoluto em $c$ se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$, e o número $f(c)$ é chamado valor mínimo de $f$ em $D_f$. Os valores máximo e mínimo de $f$ são chamados valores extremos de $f$.*

**Como determinar os valores extremos de $f$ contínua em $[a, b]$ fechado e derivável em $(a, b)$:**

1. Encontre os valores de $f$ nos números críticos de $f$ em $(a, b)$;
2. Encontre os valores de $f$ nos extremos do intervalo (isto é, em $a$ e $b$);
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

# Encontre os valores máx. e mín. absolutos de $f$

## Exercício

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leqslant 3$$

$$f(x) = 2 - \tfrac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$$

$$f(x) = 1/x, \quad x \geqslant 1$$

$$f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$$

$$f(x) = \sin x, \quad 0 \leqslant x < \pi/2$$

$$f(x) = \sin x, \quad 0 < x \leqslant \pi/2$$

$$f(x) = \sin x, \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$$

$$f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$$

$$f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$$

$$f(x) = |x|$$

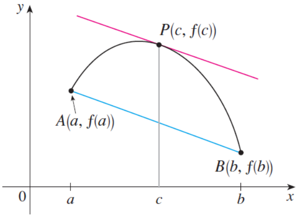
# Estudo da variação das funções

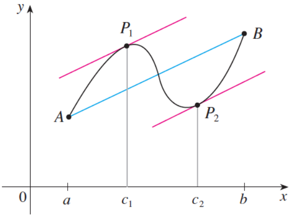
**Objetivo:** dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, queremos cortar $\mathbb{R}$ em intervalos $(a, b)$ onde $f$ é crescente ou decrescente.

## Teorema (Teorema do valor médio)

*Se $f$ for contínua em $[a, b]$ e derivável em $(a, b)$, então existirá pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \text{ ou } f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$$



# Demonstração

**Demonstração:**
aplicar Rolle para

$$g(x) = f(x) - \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$$

Teorema
*Se* $f'(x) = 0$ *para todo* $x$ *em um intervalo* $(a, b)$ *então* $f$ *é constante no intervalo.*

Teorema
*Se* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* $x$ *em um intervalo* $(a, b)$ *então* $f(x) = g(x) + C$ *onde* $C$ *é constante no intervalo.*

**Consequências:** antiderivadas e primitivas.

**15.** Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor $c$ em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

**16.** Seja $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Mostre que não existe um valor $c$ tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

**17-18** Mostre que a equação tem exatamente uma raiz real.

**17.** $2x + \cos x = 0$

**18.** $x^3 + e^x = 0$

---

**19.** Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.

**20.** Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

# Intervalos de crescimento e de decrescimento

## Teorema

*Seja $f$ contínua no intervalo $I$*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x$ interior a $I$, então $f$ será estritamente crescente em $I$,*
2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x$ interior a $I$, então $f$ será estritamente decrescente em $I$.*

**Demonstração:** Vamos mostrar o primeiro caso: sejam $s < t$. Então existe $c \in (s, t)$ tal que $f(t) - f(s) = f'(c).(t - s) > 0$.

## Exercício

*Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico:*

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
3. $x = \frac{t}{1+t^2}$
4. $f(x) = (\ln x)/x$

# Intervalos de crescimento e de decrescimento : mais exemplos

## Exercício

*Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico:*

**9.** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

**10.** $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

**11.** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

**12.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

**13.** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

**14.** $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

**15.** $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

**16.** $f(x) = x^2 \ln x$

**17.** $f(x) = x^2 - x - \ln x$

**18.** $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

# Mais consequências do teorema do valor medio

**Exercício ($e^x \to \infty$ mais rapidamente que $x$)**

1. *Mostrar* $e^x > x$ *para todo* $x \geq 0$
2. *Mostre que* $e^x > (x^2)/2$ *para todo* $x \geq 0$
3. *Mostre que* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

**Exercício**

*Prove que a equação* $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ *admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.*