

MAT 1351 : Cálculo I
Aula Segunda 18/06/2018

Sylvain Bonnot (IME-USP)

Problemas de otimização III

Exercício

Sejam a e b números positivos. Ache o comprimento do menor segmento de reta que é cortado pelo primeiro quadrante e passa pelo ponto (a, b) .

Exercício

Em quais pontos da curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ a reta tangente tem a sua maior inclinação?

Problemas de otimização IV

Exercício (Lei de Snell)

Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o Princípio de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

onde θ_1 é o ângulo de incidência e θ_2 é o ângulo de refração.

Derivação implícita

Ideia: seja uma curva escrita de maneira implícita (i.e da forma $f(x, y) = 0$ e não da forma $y = g(x)$). Se localmente podemos escrever a curva como um gráfico $y = g(x)$, queremos calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$ sem achar a expressão de $g(x)$.

Exercício

Seja a curva $x^2 + y^2 = 25$ mostre que $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

1. Derivadas de ambos lados:

$$2x + 2y(x).y'(x) = 0$$

2. Se $y(x) \neq 0$: temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Aplicação: determine a equação da reta tangente em qualquer ponto deste círculo.

Derivadas implícitas

Exercício

Encontre dy/dx por derivação implícita.

5. $x^3 + y^3 = 1$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$

15. $e^{x/y} = x - y$

17. $\operatorname{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

19. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$

6. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

8. $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

10. $xe^y = x - y$

12. $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

14. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

16. $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

18. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

20. $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{y}{1 + x^2}$

Derivadas implícitas

Exercício

Mostre fazendo a derivação implícita que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Exercício

Mostre que qualquer reta tangente em um ponto P a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP .

Exercício

Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2 y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1 .

Trajetórias ortogonais

Definição

Duas curvas são ortogonais se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção.

Exercício

Mostre que as famílias dadas de curvas são trajetórias ortogonais uma em relação a outra, ou seja, toda curva de uma família é ortogonal a toda curva da outra família. Esboce ambas as famílias de curvas no mesmo sistema de coordenadas.

$$y = ax^3 \text{ e } x^2 + 3y^2 = b.$$

Um pouco de termodinâmica

Exercício

A equação de van der Waals para n mols de um gás:

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right) (V - nb) = nRT$$

Se R, T, a, b são constantes, calcule dV/dP .

Lembra: “O mol é a quantidade de matéria de um sistema que contém tantas entidades elementares quanto são os átomos contidos em 0,012 Kg de carbono 12.”

Derivadas implícitas superiores

Exercício

Encontre y'' por derivação implícita.

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$

2. $x^4 + y^4 = a^4$

Exercício

Se $xy + e^y = e$ encontre o valor de y'' no ponto onde $x = 0.$