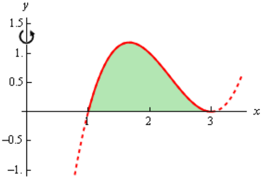
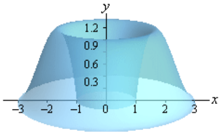
MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Método das cascas cilíndricas:
Volume: $V = \int_1^3 2\pi x f(x) dx$





Comprimento de um gráfico $y = f(x)$ **e de uma curva paramétrica** $t \mapsto (x(t), y(t))$**:**

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Integrais trigonométricas e substituições do tipo $x = \text{sen} u$ ou $x = \cos u$

Área de um semicirculo de raio 1:

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$$

Podemos fazer $x = \text{sen} u$.

Exercício

Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Ja sabemos o resultado arc* $- \text{sen}(x) + C$*, mas aqui podemos fazer a substituição* $x = \text{sen}(u)$.

Exercício

Fazer $x = tg(u)$ *para calcular* $\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{1+x^2}}$.

Mais exemplos

Exercício

Antiderivada de $1/\mathrm{sen}x$**:** *Fazer* $u = \mathrm{tg}(x/2) \Rightarrow x = 2tg^{-1}(u)$ *e* $dx = 2du/(1+u^2)$. *Agora* $1+u^2 = 1/(\cos(x/2))^2$ *e* $\frac{2u}{1+u^2} = \mathrm{sen}x$. *Fazer agora a substituição.*

Observação: a mudança $u = tg(x/2)$ é muito util:

1. mostrar que $dx = \frac{2du}{1+u^2}$
2. mostrar que $\mathrm{sen}x = \frac{2u}{1+u^2}$
3. mostrar que $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Conclusão: cada fração racional com cos , sen pode ser escrita como uma fração racional normal, em u!

Mais exemplos

Exercício

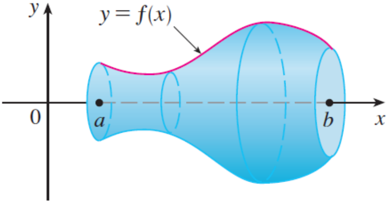
Calcule as antiderivadas:

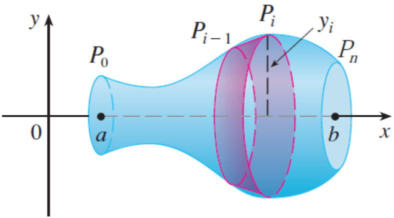
1. $\int \sqrt{1-4x^2}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$
3. $\int \frac{dx}{1+\text{sen}x}$ *(fazer* $u = tg(x/2)$*).*
4. $\int \frac{1}{\cos x}dx$

Área de uma superfície de revolução

Definição

Uma superfície de revolução é obtida quando uma curva é girada ao redor de uma reta.





Área total da superfície de revolução: é a soma das áreas de pequenas faixas (=rotação de um pequeno segmento de curva). Vamos dar a formula para a rotação ao redor do eixo x:

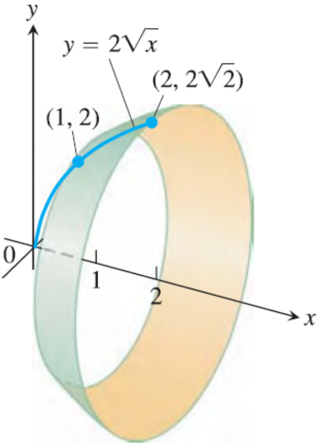
$$S = \int_a^b 2\pi f(x).\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Exemplos: Área de uma superfície de revolução

Exercício

Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x:

$$y = 2\sqrt{x}, 1 \le x \le 2.$$



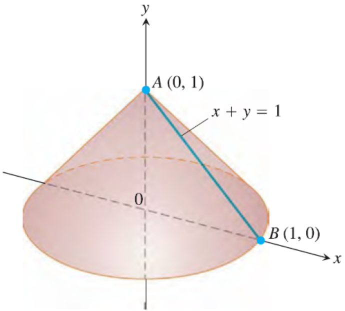
Área de uma superfície de revolução: rotação ao redor do eixo y

Área total da superfície de revolução:

$$S = \int_a^b 2\pi g(y).\sqrt{1 + (g'(y))^2}dy$$

Exercício

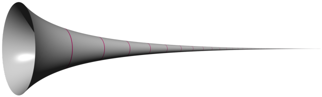
Cone obtido pela rotação de $x = 1 - y, 0 \leq y \leq 1$, *ao redor do eixo* y.



Trombeta de Gabriel

Definição

A trombeta de Gabriel (=do anjo Gabriel) é a superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = \frac{1}{x}$, com $x \in [1, \infty)$ ao redor do eixo x.



Volume do solido de revolução:

$$V = \int_1^{+\infty} \pi.\left(\frac{1}{x^2}\right) dx := \pi.\lim_{r\to\infty} \int_1^r \pi.\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Mas isso é:

$$= \pi.\lim_{r\to\infty} [-1/x]_1^r = \pi.\lim_{r\to\infty} (1 - \frac{1}{r}) = \pi.$$

Área da superfície de revolução:

$$A = 2\pi \int_1^r \frac{1}{x}.\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln r \to \infty!$$

Definição

Se $\int_a^t f(x)dx$ *existe para todo* $t \geq a$ *então:*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista (como um número, finito). Neste caso, a integral imprópria $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *é chamada convergente.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$.

Integrais impróprias, segundo tipo

Definição

Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx,$$

se esse limite existir (como um número real finito), e a integral imprópria é chamada convergente (divergente, se não).
Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx,$$

se esse limite existir (como um número real finito).
Se f tiver uma descontinuidade em c, com $a < c < b$ e $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ forem convergentes, então podemos definir: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Teorema de comparação para as integrais impróprias

Teorema

Vamos supor que f *e* g *são contínuas com* $f(x) \geq g(x) \geq 0$ *para* $x \geq a$.

1. *Se* $\int_a^\infty f(x)dx$ *é convergente, então* $\int_a^\infty g(x)dx$ *é convergente.*
2. *Se* $\int_a^\infty g(x)dx$ *é divergente, então* $\int_a^\infty f(x)dx$ *é divergente também.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$.

Exercício

Calcule:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$

6. $\displaystyle\int_{-8}^{1} \frac{dx}{x^{1/3}}$

7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dr}{r^{0.999}}$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$

Exercício

Convergente ou divergente?

41. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sin t}$

42. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t - \sin t}$ ($t \geq \sin t$ $t \geq 0$)

43. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1 - x^2}$

44. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1 - x}$

45. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln |x| dx$

46. $\displaystyle\int_{-1}^{1} -x \ln |x| dx$

47. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$

48. $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$

49. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v - 1}}$

50. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1 + e^{\theta}}$

51. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 1}}$

52. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

53. $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\sqrt{x + 1}}{\cdots} dx$

54. $\displaystyle\int^{\infty} \frac{x\, dx}{\cdots}$