MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Teorema

Sejam f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$$

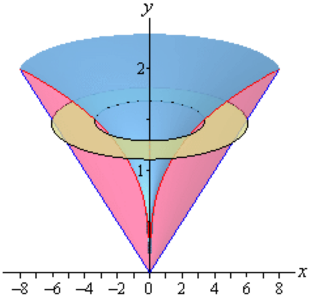
Volumes dos sólidos de revolução: método dos "anéis" A área da secção transversal é :

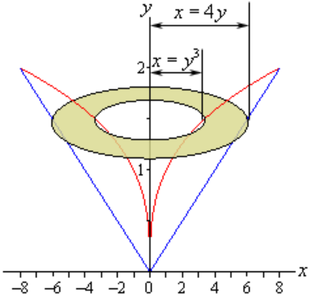
$$A(x) = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2 = \text{ area de um anel}$$

e o volume é:

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

Exemplo:





Secção transversal:

$$A(y) = \pi((4y)^2 - (y^3)^2) = \pi.(16y^2 - y^6)$$

Volume:

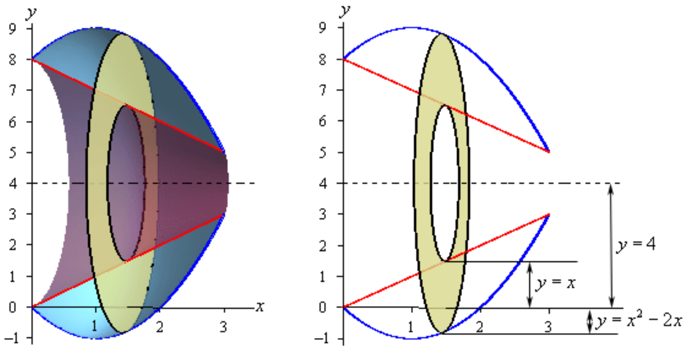
$$V = \int_0^2 A(y)dy = \pi.\int_0^2 16y^2 - y^6 dy = \pi.[\frac{16}{3}y^3 - \frac{1}{7}y^7]_0^2 = \frac{512}{21}\pi$$

Mais exemplos:

Exercício

Determine o volume do solido obtido pela rotação da região S ao redor da reta $y = 4$. A região S é a região entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2 - 2x$

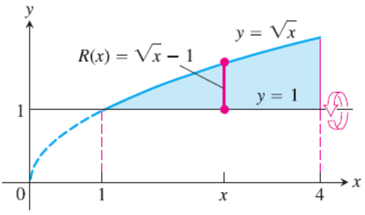
Região S



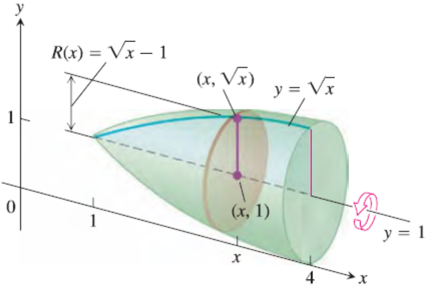
Exercício

Determine o volume do solido abaixo.

Região S



(a)

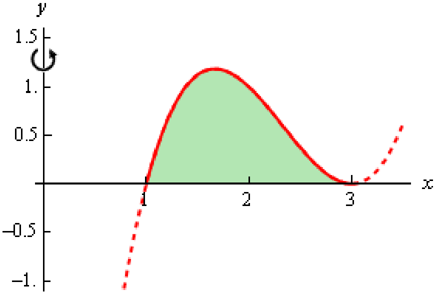


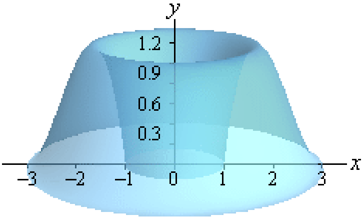
(b)

Exercício

Determine o volume do solido abaixo, onde $y = (x-1)(x-3)^2$

Região S

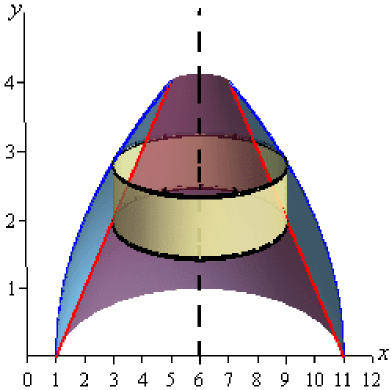


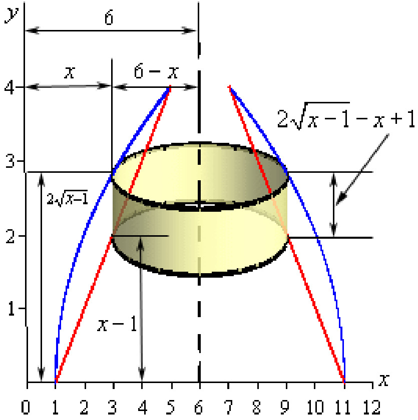


Exercício

Determine o volume do solido abaixo, onde as duas curvas são $y = (x - 1)$ *e* $y = 2\sqrt{x-1}$.

Região S



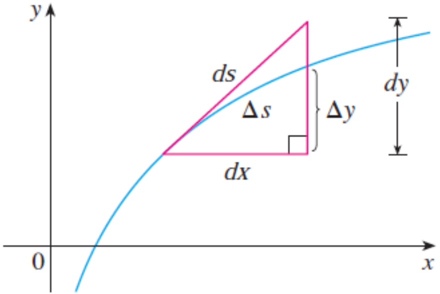


Formula do comprimento:

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Porque? Para um pedaço de gráfico, o comprimento é

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



Exemplos de cálculo de comprimentos de gráficos

Exercício

Calcule o comprimento do gráfico da função dada:

1. $y = (2/3)x^{3/2}$ *para* $0 \leq x \leq 1$ *(Resp:* $(2/3)(2\sqrt{2} - 1)$*).*

Comprimento de curva em forma paramétrica

Isso significa que a curva é dada como:

$$x = x(t) \text{ e } y = y(t),$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções de um paramétro $t \in I$.
Exemplos: parabola $x(t) = t, y(t) = t^2$. Circulo: $(\cos t, \text{sen} t)$.

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Comprimento da circunferência de raio R.

Exercício

Calcule o comprimento da curva dada em forma paramétrica:

1. $x = 3t$ *e* $y = 2t^{3/2}$, $0 \leq t \leq 1$.
2. $x = 2t + 1$ *e* $y = t - 1$, $1 \leq t \leq 2$.

Área de um semicirculo de raio 1:

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

Podemos fazer $x = \text{sen} u$, então $\cos(u) = \sqrt{1-x^2}$ e $dx = \cos(u)du$. Assim podemos obter: (lembra que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)\cos(u)du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos(2u))/2du = \pi/2$$

Exercício

Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Ja sabemos o resultado* $arc - \text{sen}(x) + C$, *mas aqui podemos fazer a substituição* $x = \text{sen}(u)$.

Exercício

Fazer $x = tg(u)$ *para calcular* $\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{1+x^2}}$.

Mais exemplos

Exercício

Antiderivada de $1/\text{sen}x$**:** *Fazer* $u = \text{tg}(x/2) \Rightarrow x = 2tg^{-1}(u)$ *e* $dx = 2du/(1+u^2)$. *Agora* $1 + u^2 = 1/(\cos(x/2))^2$ *e* $\frac{2u}{1+u^2} = \text{sen}x$. *Fazer agora a substituição.*

Observação: a mudança $u = tg(x/2)$ é muito util:

1. mostrar que $dx = \frac{2du}{1+u^2}$
2. mostrar que $\text{sen}x = \frac{2u}{1+u^2}$
3. mostrar que $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Conclusão: cada fração racional com cos , sen pode ser escrita como uma fração racional normal, em u!

Mais exemplos

Exercício

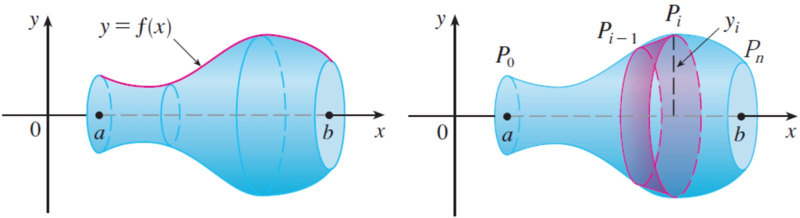
Calcule as antiderivadas:

1. $\int \sqrt{1-4x^2}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$
3. $\int \frac{dx}{1+\text{sen}x}$ *(fazer* $u = tg(x/2)$*).*
4. $\int \frac{1}{\cos x}dx$

Área de uma superfície de revolução

Definição

Uma superfície de revolução é obtida quando uma curva é girada ao redor de uma reta.



Área total da superfície de revolução: é a soma das áreas de pequenas faixas (=rotação de um pequeno segmento de curva). Vamos dar a formula para a rotação ao redor do eixo x:

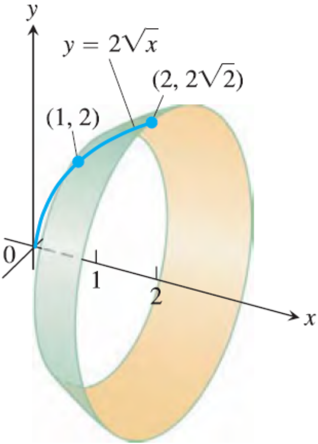
$$S = \int_a^b 2\pi f(x).\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Exemplos: Área de uma superfície de revolução

Exercício

Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x:

$$y = 2\sqrt{x}, 1 \leq x \leq 2.$$



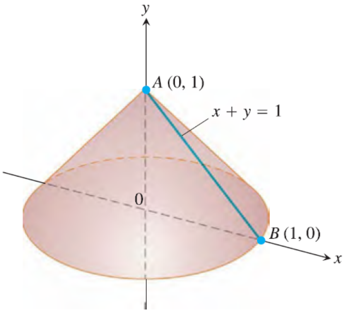
Área de uma superfície de revolução: rotação ao redor do eixo y

Área total da superfície de revolução:

$$S = \int_a^b 2\pi g(y).\sqrt{1 + (g'(y))^2}dy$$

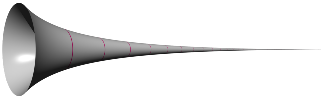
Exercício

Cone obtido pela rotação de $x = 1 - y, 0 \leq y \leq 1$*, ao redor do eixo* y.



Definição

A trombeta de Gabriel (=do anjo Gabriel) é a superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = \frac{1}{x}$*, com* $x \in [1, \infty)$ *ao redor do eixo* x*.*



Volume do solido de revolução:

$$V = \int_1^{+\infty} \pi . \left(\frac{1}{x^2}\right) dx := \pi . \lim_{r \to \infty} \int_1^r \pi . \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Mas isso é:

$$= \pi . \lim_{r \to \infty} [-1/x]_1^r = \pi . \lim_{r \to \infty} (1 - \frac{1}{r}) = \pi .$$

Área da superfície de revolução:

$$A = 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} . \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln r \to \infty!$$

Integrais impróprias

Definição

Se $\int_a^t f(x)dx$ *existe para todo* $t \geq a$ *então:*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

desde que o limite exista (como um número, finito). Neste caso, a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)dx$ *é chamada convergente.*

Exercício

Mostrar que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$.