

MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

- **Prof.:** Sylvain Bonnot
 - **Email:** sylvain@ime.usp.br
 - **Minha sala:** IME-USP, 151-A (Bloco A)
 - **Site:** ver o link para MAT 121 na pagina
<http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html>
Nessa página: as notas de aulas, informações gerais, listas de exercícios (com soluções...), etc...
-
- **Monitoria:** aguardando para ver se tem um...
 - **Avaliação:** as informações vão aparecer no site
-

Um pouco de cultura matematica

Hoje: Medalha Fields = "Premio Nobel" mas essa vez têm duas novidades:

- **Um brasileiro:** Artur Avila



- **Uma mulher:** Maryam Mirzakhani



Resumo da aula 4

Definição

O deslocamento da partícula entre os instantes a e b é a diferença

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t) dt$$

Definição

O espaço percorrido pela partícula entre os instantes a e b é definido como:

$$\int_a^b |v(t)| dt$$

Definição

O valor médio da função f no intervalo $[a, b]$ é:

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Teorema

Se f é contínua em $[a, b]$ então existe um $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b - a)$$

Áreas entre curvas:

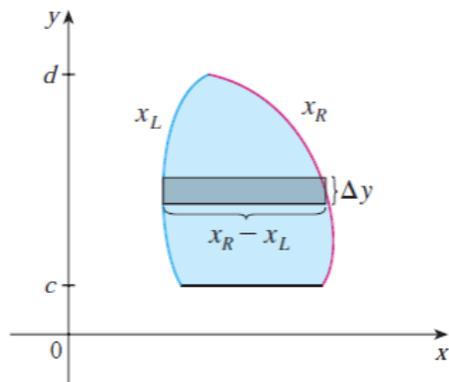
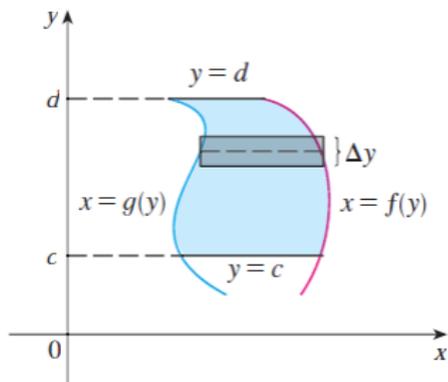
Definição

A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Áreas entre duas curvas

Funções de y : as vezes, é mais facil de descrever uma região com curvas do tipo $x = g(y)$.



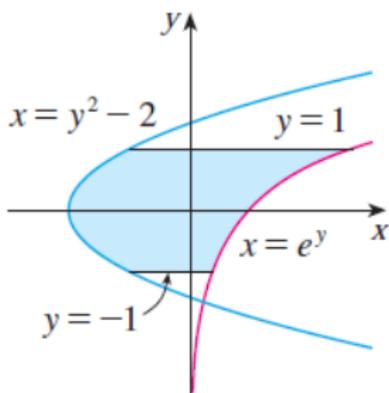
Áreas entre duas curvas

Funções de y :

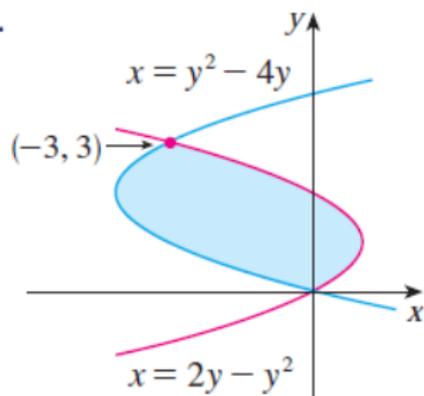
Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:

3.



4.



Integrais indefinidas

Definição

A integral indefinida de f é o conjunto de todas as antiderivadas de f . Ela é denotada por

$$\int f(x)dx.$$

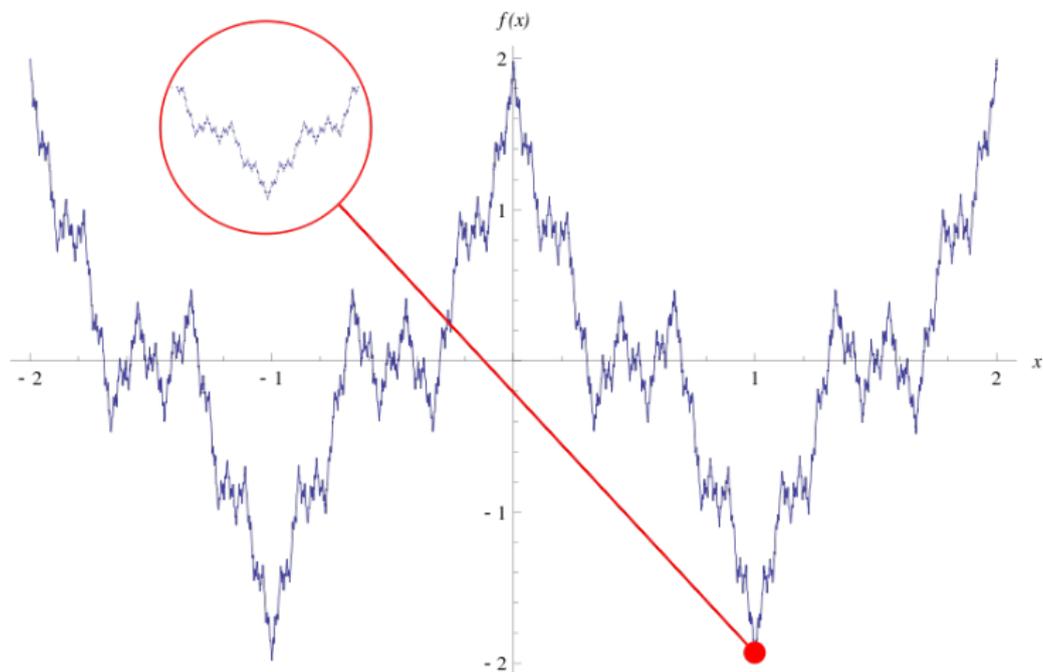
Teorema

Para determinar $\int f(x)dx$, é suficiente de encontrar uma antiderivada F de f , e depois

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante arbitrária.}$$

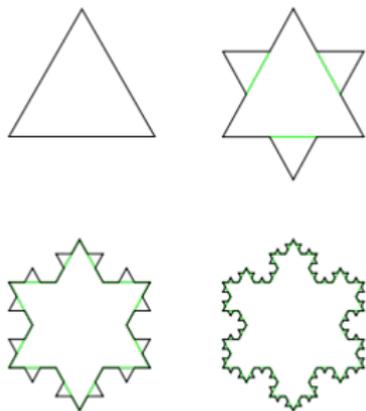
Funções contínuas sem derivadas

Exemplo de Weierstrass: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \cos(b^n \pi x)$, com $0 < a < 1$.



o floco de neve de von Koch

Construção: começar com um triângulo equilátero, e colocar 3 pequenos novos triângulos de tamanho $(1/3)$ do tamanho inicial. Continuar.



Exercício

Mostrar que o perímetro P_n é tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = +\infty$.

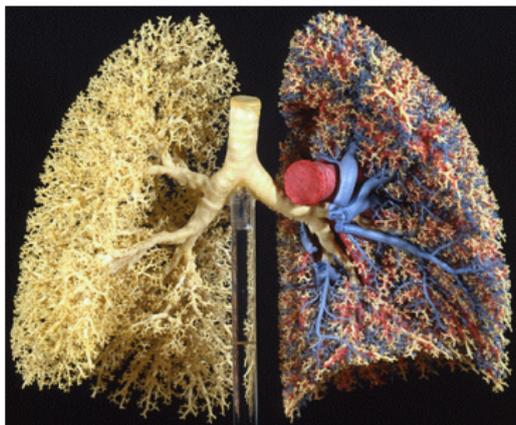
Um fato útil: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x}{2^x} = \infty$:

Demonstração

O número total de segmentos é $N_n = 4^n \cdot N_0 = 4^n \cdot 3$ (porque?). O comprimento de cada segmento é $L_n = \frac{L_{n-1}}{3} = \frac{L_0}{3^n}$. Então $P_n = N_n \cdot L_n = 3L_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow \infty$

Observação 1: a área é limitada.

Observação 2: este tipo de objeto é chamado objeto fractal.



Mais fractais

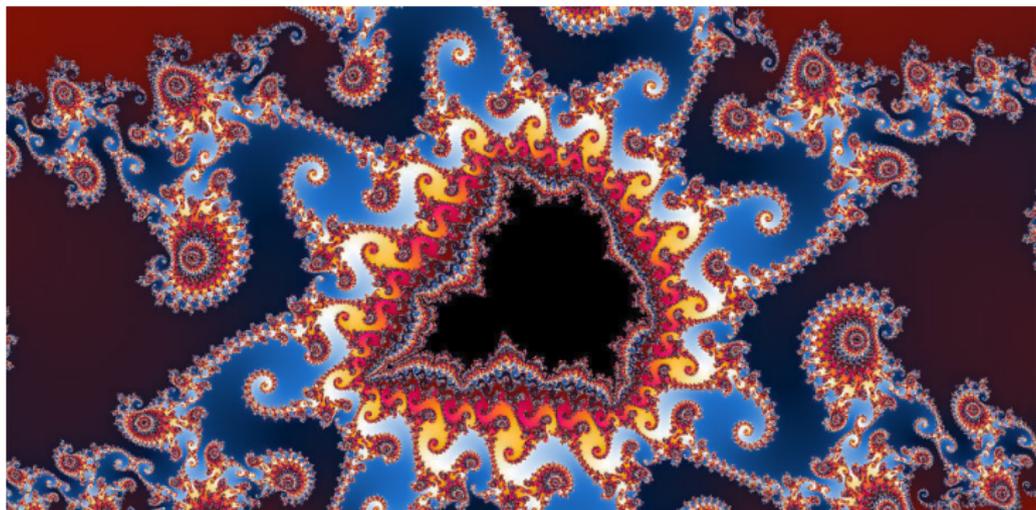
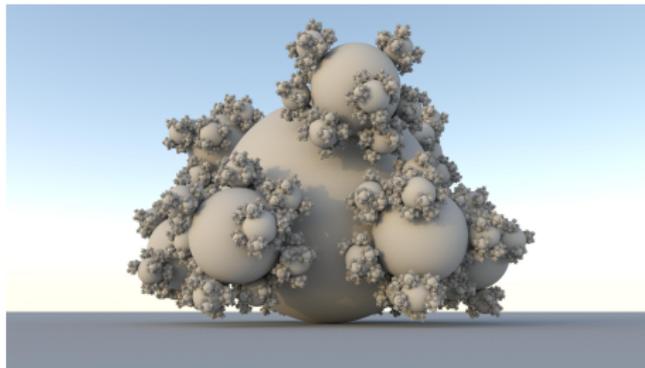


Tabela de antiderivadas

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int k dx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \tan^{-1}x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}x + C$$

Regra da Substituição

Teorema

Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I então

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du$$

Este teorema é uma consequência imediata da regra da cadeia:

$$\int F'(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int f(u)du$$

Como utilizar o teorema? $\int x \cdot \cos(x^2 + 1)dx$. Vamos fazer $u = x^2 + 1$, então $du = 2xdx$. Isso implica: $xdx = \frac{1}{2}du$. Finalmente,

$$\int x \cdot \cos(x^2 + 1)dx = \frac{1}{2} \int \cos(u)du$$

Mas agora $\frac{1}{2} \int \cos(u)du = \frac{1}{2}\text{senu} + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2 + 1) + C$.

Praticar com a regra da Substituição

$$9. \int (1 - 2x)^9 dx$$

$$10. \int (3t + 2)^{2.4} dt$$

$$11. \int (x + 1)\sqrt{2x + x^2} dx$$

$$12. \int \sec^2 2\theta d\theta$$

$$13. \int \frac{dx}{5 - 3x}$$

$$14. \int u\sqrt{1 - u^2} du$$

$$15. \int \sin \pi t dt$$

$$16. \int e^x \cos(e^x) dx$$

$$17. \int \frac{e^u}{(1 - e^u)^2} du$$

$$18. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$19. \int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} dx$$

$$20. \int \frac{z^2}{z^3 + 1} dz$$

$$21. \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$22. \int \cos^4 \theta \sin \theta d\theta$$

Algumas Respostas

- 9) $(-1/20)(1 - 2x)^{10}$
- 11) $(1/3)(x(2 + x))^{3/2}$
- 14) $(-1/3)(1 - u^2)^{3/2}$
- 21) $(\ln(x))^3/3$

Regra da Substituição para integrais definidas:

Teorema

Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$ então

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Regra da Substituição para integrais definidas:

$$61. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x) dx$$

$$62. \int_0^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x) dx$$

$$63. \int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$$

$$64. \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$65. \int_0^a x \sqrt{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0)$$

$$66. \int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x dx$$

$$67. \int_1^2 x \sqrt{x-1} dx$$

$$68. \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$$

$$69. \int_e^{e^4} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$$

$$70. \int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$71. \int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z} dz$$

$$72. \int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T - \alpha) dt$$

$$73. \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$$

Integração por partes

Derivada de um produto:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Ou, também:

$$f(x)g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$$

Teorema (Regra de integração por partes)

Vamos supor que $f'(x) \cdot g(x)$ tem uma primitiva, então:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

Outra notação: podemos fazer $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Exercício

Calcule:

① $\int x.e^x dx$ (Resp: $e^x(x - 1) + C$)

② $\int \ln(x) dx$ (Resp: $x.\ln(x) - x + C$)

③ $\int (\ln x)^2 dx$ (Resp: $2x - 2x.\ln(x) + x(\ln(x))^2 + C$)

④ $\int x \operatorname{sen} x dx$ (Resp: $-x.\cos x + \operatorname{sen} x + C$)

Integração por partes para integrais definidas

Teorema

Sejam f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$$

Exercício

Calcule:

- 1 $\int_0^1 x.e^x dx$
- 2 $\int_0^{\pi/2} e^x . \cos x dx$
- 3 $\int_0^x t^2 . e^{-st} dt$
- 4 $\int_1^2 \ln x dx$