MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Informações gerais

- **Prof.:** Sylvain Bonnot
- **Email:** sylvain@ime.usp.br
- **Minha sala:** IME-USP, 151-A (Bloco A)
- **Site:** ver o link para MAT 121 na pagina `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html` Nessa página: as notas de aulas, informações gerais, listas de exercícios (com soluções...), etc...

- **Monitoria:** aguardando para ver se tem um...
- **Avaliação:** as informações vão aparecer no site

Resumo da aula 3

- **Funções do tipo:** $F(x) = \int_a^x f(t)dt$,

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 1)

Se f for contínua em $[a,b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é continua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$.

- **Cálculo das integrais, sem somas de Riemann:**

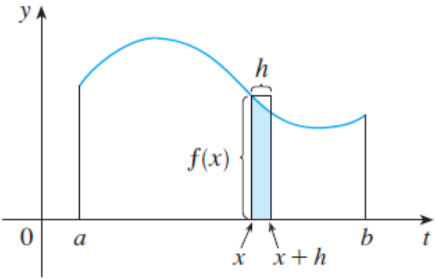
Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 2)

Se f for contínua em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Teorema fundamental do cálculo



Praticar: calcule as derivadas

Exercício

A função erro em probabilidade é dada por

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Mostrar que $e^{x^2} erf(x)$ *satisfaz a equação diferencial*

$$y' = 2xy + \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Praticar: calcular a integral (se existe)

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx$

20. $\int_{-1}^{1} x^{100}\, dx$

21. $\int_{1}^{4} (5 - 2t + 3t^2)\, dt$

22. $\int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_{1}^{9} \sqrt{x}\, dx$

24. $\int_{1}^{8} x^{-2/3}\, dx$

25. $\int_{\pi/6}^{\pi} \sin\theta\, d\theta$

26. $\int_{-5}^{5} e\, dx$

27. $\int_{0}^{1} (u + 2)(u - 3)\, du$

28. $\int_{0}^{4} (4 - t)\sqrt{t}\, dt$

29. $\int_{1}^{9} \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$

30. $\int_{0}^{2} (y - 1)(2y + 1)\, dy$

31. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$

32. $\int_{0}^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

Movimento de uma particula no eixo x

Uma particula se desloca no eixo x, com equação $x = x(t)$ e velocidade $v = v(t)$ (função contínua em $[a, b]$).

Definição

O deslocamento da particula entre os instantes a e b é a diferença

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)dt$$

Definição

O espaço percorrido pela particula entre os instantes a e b é definido como:

$$\int_a^b |v(t)|dt$$

Movimento de uma particula no eixo x

Exercício

Uma particula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geq 0$.

1. *Calcule o deslocamento entre $t = 1$ e $t = 3$.*
2. *Qual é o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$?*

Valor Médio de uma função : mais uma aplicação das somas de Riemann

Para uma quantidade finita de números:

$$y_{med} = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_n}{n}$$

Para um número infinito de medidas: dado um gráfico da temperatura $T = f(t)$ $0 \leq t \leq 24$ horas, podemos fazer 24 medidas e calcular a média (isto é fazer uma medida durante a primeira hora do dia, uma medida durante a segunda hora, etc...)

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n}, \text{ com } n = 24$$

mas temos que

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n} = \frac{1}{b-a} . \frac{b-a}{n} . (f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star))$$

cujo limite é $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Valor Médio de uma função

Então podemos definir:

Definição

O valor médio da função f no intervalo $[a,b]$ é:

$$f_{med} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

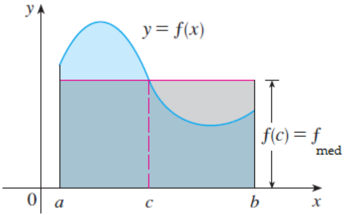
Teorema

Se f é contínua em $[a,b]$ então existe um $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

Prova: O teorema do valor médio para $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diz que existe $c \in (a,b)$ tal que $F(b) - F(a) = F'(c).(b-a)$. Mas agora, temos que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Valor Médio de uma função



Exercício

Se uma xicara de café tem uma temperatura de 95 graus, em uma sala cuja temperatura ambiente é de 20 graus. De acordo com a Lei de resfriamento de Newton, a temp. do café após t minutos será:

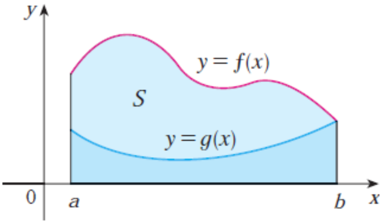
$$T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$$

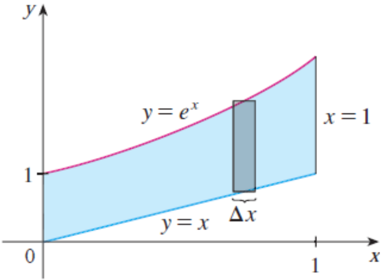
Qual é a temperatura média do café durante a primeira meia hora?

Definição

Seja f contínua em $[a,b]$ com $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Vamos definir A como o conjunto do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$. Então:

$$\text{área } A = \int_a^b f(x)dx.$$





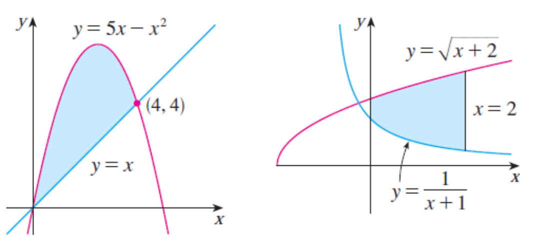
Definição

A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:



Exercício

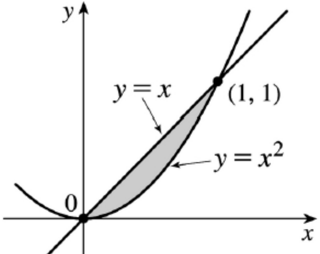
Encontre a área da região entre $y = x$ e $y = x^2$

Solução: Temos que determinar a interseção das duas curvas:

$$x = x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ou } x = 1$$

Depois, entre $x = 0$ e $x = 1$ temos que $x \geq x^2$ então:

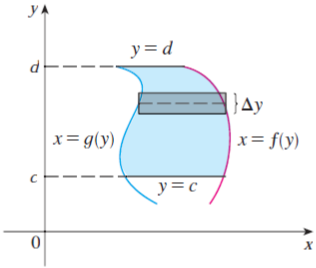
$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

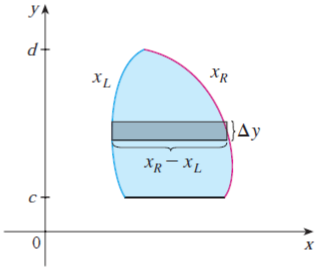


Exercício

Encontre a área da região entre $y = \sqrt{x}$ *e* $y = x/2$ *e* $0 \leq x \leq 9$

Funções de y: as vezes, é mais facil de descrever uma região com curvas do tipo $x = g(y)$.

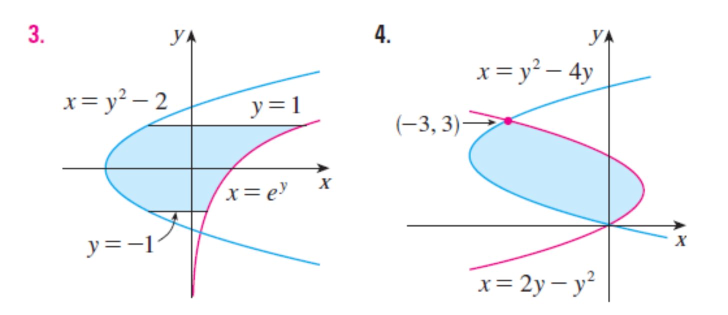




Funções de y:

Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:



Integrais indefinidas

Definição

A integral indefinida de f é o conjunto de todas as antiderivadas de f. Ela é denotada por

$$\int f(x)dx.$$

Teorema

Para determinar $\int f(x)dx$, é suficiente de encontrar uma antiderivada F de f, e depois

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante arbitraria.}$$

Tabela de antiderivadas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

Regra da Substituição

Teorema

Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e f for continua em I então

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du$$

Este teorema é uma consequência imediata da regra da cadeia:

$$\int F'(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int f(u)du$$

Como utilizar o teorema? $\int x.\cos(x^2+1)dx$. Vamos fazer $u = x^2+1$, então $du = 2xdx$. Isso implica: $xdx = \frac{1}{2}du$. Finalmente,

$$\int x.\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du$$

Mas agora $\frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\text{sen}u + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2+1) + C.$

Praticar com a regra da Substituição

9. $\int (1 - 2x)^9 \, dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4} \, dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2} \, dx$

12. $\int \sec^2 2\theta \, d\theta$

13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int u\sqrt{1 - u^2} \, du$

15. $\int \sin \pi t \, dt$

16. $\int e^x \cos(e^x) \, dx$

17. $\int \frac{e^u}{(1 - e^u)^2} \, du$

18. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

19. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} \, dx$

20. $\int \frac{z^2}{z^3 + 1} \, dz$

21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

22. $\int \cos^4\theta \sin \theta \, d\theta$

Algumas Respostas

9) $(-1/20)(1-2x)^{10}$

11) $(1/3)(x(2+x))^{3/2}$

14) $(-1/3)(1-u^2)^{3/2}$

21) $(ln(x))^3/3$

Regra da Substituição para integrais definidas:

Teorema

Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$ então

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Regra da Substituição para integrais definidas:

61. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x)\, dx$

62. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x)\, dx$

63. $\displaystyle\int_{0}^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\displaystyle\int_{0}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\displaystyle\int_{0}^{a} x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x\, dx$

67. $\displaystyle\int_{1}^{2} x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\displaystyle\int_{e}^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\displaystyle\int_{0}^{T/2} \sin(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

Integração por partes

Derivada de um produto:

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

Ou, também:

$$f(x)g'(x) = [f(x).g(x)]' - f'(x).g(x)$$

Teorema (Regra de integração por partes)

Vamos supor que $f'(x).g(x)$ tem uma primitiva, então:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

Outra notação: podemos fazer $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplos: Integração por partes, integrais indefinidas

Exercício

Calcule:

1. $\int x.e^x dx$ (*Resp:* $e^x(x-1)+C$
2. $\int ln(x)dx$ (*Resp:* $x.ln(x)-x+C$)
3. $\int (lnx)^2 dx$ (*Resp:* $2x-2x.ln(x)+x(ln(x))^2+C$)
4. $\int x\text{sen}x dx$ (*Resp:* $-x.\cos x+\text{sen}x+C$)

Integração por partes para integrais definidas

Teorema

Sejam f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a,b]$, então:

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$$

Exercício

Calcule:

1. $\int_0^1 x.e^x dx$
2. $\int_0^{\pi/2} e^x.\cos x dx$
3. $\int_0^x t^2.e^{-st} dt$
4. $\int_1^2 \ln x dx$