MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Informações gerais

- **Prof.:** Sylvain Bonnot
- **Email:** sylvain@ime.usp.br
- **Minha sala:** IME-USP, 151-A (Bloco A)
- **Site:** ver o link para MAT 121 na pagina
  `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
  Nessa página: as notas de aulas, informações gerais, listas de exercícios (com soluções...), etc...

- **Monitoria:** aguardando para ver se tem um...
- **Avaliação:** as informações vão aparecer no site

Resumo da aula 2

- **Uma soma util:** para $0 < |x| < 1$,

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1}{1-x}$$

- **Soma de Riemann:** uma soma como

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^\star).\Delta x, \text{ onde } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

- **Integral de Riemann:** para "boas funções" (i.e contínuas com um número finito de descontinuidades):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^\star).\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

- **Propriedades da integral de Riemann**: principalmente:

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Resumo da aula 2

Exercício

Calcule $\int_0^1 e^t dt$ *com as somas de Riemann.*

Exercício

Use as propriedades da integral para verificar a desigualdade sem calcular as integrais:

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x dx \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$$

Mais propriedades da integral

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

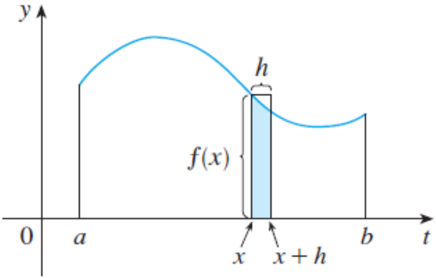
1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a),$ onde c é constante

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$ onde c é constante

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Teorema fundamental do cálculo



Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 1)

Se f for contínua em $[a,b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é continua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$.

Exemplo de função do tipo $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Pêndulo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\mathrm{sen}\theta = 0.$$

Aproximação para pequenas amplitudes : $\theta \simeq 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\theta \simeq \theta$: a equação é agora:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

cuja solução é $\theta(t) = \theta_0 \cos(\frac{g}{l}t)$. O periodo das oscilações é $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. ("Lei de Huygens").

Sem aproximação: podemos mostrar:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

e integrando ao longo de um quarto de período:

$$T = 4\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Teorema fundamental do cálculo: prova

$$
\begin{aligned}
g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\
&= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right) - \int_a^x f(t)\,dt \\
&= \int_x^{x+h} f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt
$$

Agora o ultimo termo é quase como $h.f(x)$ então $F'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo, parte 2

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Prova: com $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, sabemos que $g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)dt$. Mas também sabemos que duas antiderivadas de f diferem por uma constante

$$F(x) = g(x) + C$$

então $F(b) - F(a) = (g(b) + C) - (g(a) + C) = \int_a^b f(t)dt$.

Praticar: calcule as derivadas

7. $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\, dt$

8. $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\, dt$

9. $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8\, dt$

10. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\, dt$

Praticar: calcule as derivadas

12. $G(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\, dt$

13. $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\, dt$

14. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4 + 1}\, dz$

15. $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\, dt$

16. $y = \int_0^{x^4} \cos^2\theta\, d\theta$

17. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1 + u^2}\, du$

18. $y = \int_{\sin x}^{1} \sqrt{1 + t^2}\, dt$

56. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \sin t\, dt$

57. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\, dt$

58. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t\, dt$

59. $y = \int_{\cos x}^{\sin x} \ln(1 + 2v)\, dv$

Regras das derivadas

Formulas gerais

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Produto)

6. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

7. $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regra da cadeia)

8. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Exponencias

9. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

11. $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$

12. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

Praticar: calcule as derivadas

Exercício

Calcule as derivadas:

1. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1} dz$
2. $y = \int_0^{x^4} \cos^2 \theta d\theta.$

Tabela de antiderivadas

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

Praticar com integrais

Exercício

A função erro em probabilidade é dada por

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Mostrar que $e^{x^2} erf(x)$ *satisfaz a equação diferencial*

$$y' = 2xy + \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Praticar: calcular a integral (se existe)

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx$

20. $\int_{-1}^{1} x^{100}\, dx$

21. $\int_{1}^{4} (5 - 2t + 3t^2)\, dt$

22. $\int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_{1}^{9} \sqrt{x}\, dx$

24. $\int_{1}^{8} x^{-2/3}\, dx$

25. $\int_{\pi/6}^{\pi} \sin\theta\, d\theta$

26. $\int_{-5}^{5} e\, dx$

27. $\int_{0}^{1} (u + 2)(u - 3)\, du$

28. $\int_{0}^{4} (4 - t)\sqrt{t}\, dt$

29. $\int_{1}^{9} \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$

30. $\int_{0}^{2} (y - 1)(2y + 1)\, dy$

31. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$

32. $\int_{0}^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

Movimento de uma particula no eixo x

Uma particula se desloca no eixo x, com equação $x = x(t)$ e velocidade $v = v(t)$ (função contínua em $[a, b]$).

Definição

O deslocamento da particula entre os instantes a e b é a diferença

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)dt$$

Definição

O espaço percorrido pela particula entre os instantes a e b é definido como:

$$\int_a^b |v(t)|dt$$

Movimento de uma particula no eixo x

Exercício

Uma particula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geq 0$.

1. *Calcule o deslocamento entre $t = 1$ e $t = 3$.*
2. *Qual é o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$?*

Valor Médio de uma função

Para uma quantidade finita de números:

$$y_{med} = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_n}{n}$$

Para um número infinito de medidas: dado um gráfico da temperatura $T = f(t)$ $0 \leq t \leq 24$ horas, podemos fazer 24 medidas e calcular a média (isto é fazer uma medida durante a primeira hora do dia, uma medida durante a segunda hora, etc...)

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n}, \text{ com } n = 24$$

mas temos que

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n} = \frac{1}{b-a} . \frac{b-a}{n} . (f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star))$$

cujo limite é $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Valor Médio de uma função

Então podemos definir:

Definição

O valor médio da função f no intervalo $[a, b]$ é:

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

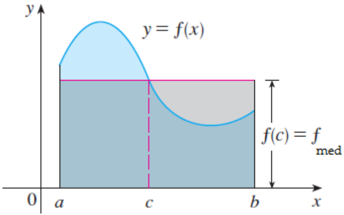
Teorema

Se f é contínua em $[a, b]$ então existe um $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

Prova: O teorema do valor médio para $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diz que existe $c \in (a, b)$ tal que $F(b) - F(a) = F'(c).(b-a)$. Mas agora, temos que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Valor Médio de uma função



Exercício

Se uma xicara de café tem uma temperatura de 95 graus, em uma sala cuja temperatura ambiente é de 20 graus. De acordo com a Lei de resfriamento de Newton, a temp. do café após t minutos será:

$$T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$$

Qual é a temperatura média do café durante a primeira meia hora?