MAT 121 : Cálculo II

Aula 27 e 28 , Segunda 03/11/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo

1. **Derivadas parciais:** seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ é o limite (quando existe)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a}{h}.$$

2. **Derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário $\vec{u} = (a,b)$:** é o limite (se existir)

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h}$$

3. **Vetor gradiente:** seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o gradiente de f, denotado por ∇f ("del f" ou "nabla f"), é definido por:

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

4. **Relação entre gradiente e derivada direcional:** utilizando o produto escalar,

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0).\vec{u}$$

Gradiente

Exercício

Calcule $\nabla f(x,y)$ *para* $f(x,y) = x/y$ *e para* $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

Exercício

Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$ *e* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *uma curva diferenciável tal que* $f(\gamma(t)) = 1$ *para todo* t. *Mostre que* $\gamma'(t).\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

Linearização de uma função

Dimensão 1:

1. **Em dimensão 1:** a existência de uma derivada $f'(a)$ no ponto a implica que a função f tem uma *aproximação linear* $L(x)$ dada por

$$L(x) = f(a) + f'(a).(x - a)$$

(isso é simplesmente a equação da reta tangente no ponto $(a, f(a))$).

2. **Aproximação linear:** podemos definir uma **aplicação linear** $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $L(y) = f'(a).y$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Assim perto de $x = a$, $f(x)$ é perto de $f(a) + L(x - a)$, isto é $f(x) = f(a) + L(x - a) + \text{ resto }$.

3. **Outra expressão da diferenciabilidade de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:**

$$\frac{|f(x) - (f(a) + L(x - a))|}{|x - a|} \to 0, \text{ quando } x \to a.$$

Observação: tem muitas outras definições possiveis da diferenciabilidade em dimensão 1, por exemplo:

Definição

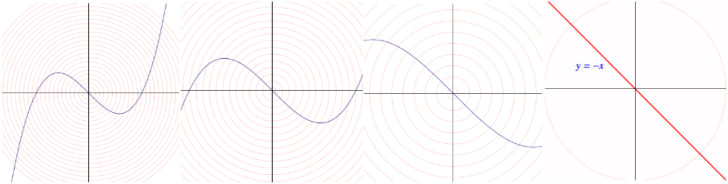
Uma função $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciavel no ponto $a \in U$ se existe uma função ϕ contínua em a tal que

$$f(x) - f(a) = \phi(x).(x - a).$$

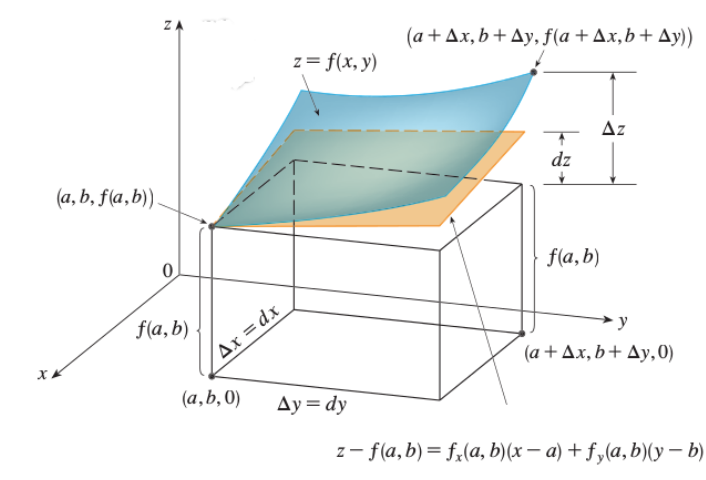
Dimensão 1: reta tangente e "zoom": a reta tangente é o que você vai obter depois de fazer um zoom infinito perto do ponto $(a, f(a)$ (=olhar com um microscópio o gráfico).) **Exemplo:** vamos considerar $f(x) = x(x-1)(x+1)$
Um zoom é nada mais do que um esticamento horizontal e vertical do gráfico, com o mesmo fator $c \to \infty$

$$y = c.f(x/c) \implies y = c.\frac{x}{c}.(\frac{x}{c} - 1).(\frac{x}{c} + 1) \to -x.$$

Zoom ao redor de $(a, f(a)) = (0,0)$



Perto de um ponto do gráfico $z = f(x,y)$: o gráfico é quase como um plano.



Plano tangente

Como determinar a equação do plano? O plano tem que passar pelos pontos: $(a,b,f(a,b))$ e $(a+\Delta x, b, f(a,b)+f_x(a,b).\Delta x)$ e finalmente $(a, b+\Delta y, f(a,b)+f_y(a,b).\Delta y)$. Isso implica que a equação dele é:

$$z = f(a,b) + f_x(a,b).(x-a) + f_y(a,b).(y-b).$$

Aplicações lineares $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

Definição

Uma aplicação $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ do tipo $L(x,y) = cx + dy$ (com c, d constantes) é dita **linear**.

Diferencial: seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ existem, podemos definir uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ chamada a diferencial como:

$$L(u,v) = f_x(a,b).u + f_y(a,b).v$$

Função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Problema: podemos definir a diferencial desde que temos f_x e f_y, mas não sabemos se ela vai ser uma boa aproximação da função. Uma função tal que a diferencial $L(x-a, y-b)$ é uma boa aproximação de $f(x,y) - f(a,b)$ é chamada *diferenciável*:

Definição

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, U aberto de $\mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) um ponto de U. Então f é diferenciável em (x_0, y_0) se e somente se existirem reais a, b tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (ah+bk)}{\|(h,k)\|} = 0$$

Termo de Erro: $E(h,k) := f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (ah+bk)$ pode ser visto como um termo de erro, e $\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}$ como um erro relativo.

Funçao diferenciável e derivadas parciais

Teorema

Seja f diferenciável em (x_0, y_0), então necessariamente f tem derivadas parciais neste ponto e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = b$.

Teorema

Seja f definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in U$. Então f é diferenciável em (x_0, y_0) se e somente se:

1. *f admite derivadas parciais em (x_0, y_0),*
2. *o erro $E(h, k) :=$ $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(x_0, y_0)k)$ é tal que:*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Determinar se uma funçao é diferenciável

Método 1: utilizar a definição (pode ser pesado...)
Método 2: utilizar a seguinte condição **suficiente**:

Teorema

Seja f definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in U$. Se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existirem em U e forem contínuas no ponto (x_0, y_0) então f será diferenciável neste ponto.

Caso particular (o caso mais comum): se f for de **classe** C^1 em U então f será diferenciável em U.

Definição

f é de classe C^0 significa que f é contínua. f é de classe C^1 significa que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em U e são contínuas.

Determinar se uma funçao é diferenciável

Exercício

Verifique que a função dada é diferenciável:

1. $f(x,y) = e^{x-y^2}$
2. $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

Exercício

Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável:

1. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *se* $(x,y) \neq (0,0)$ *e* $f(0,0) = (0,0)$
2. $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ *se* $(x,y) \neq (0,0)$ *e* $f(0,0) = (0,0)$

Linearização

Definição

A linearização de f no ponto (a,b) é definida como:

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b).(y-b).$$

Exercício

Explique porque a função é diferenciável, e encontre a linearização no ponto dado.

$$f(x,y) = 1 + x\ln(xy-5), \quad (2,3)$$

$$f(x,y) = x^3y^4, \quad (1,1)$$

$$f(x,y) = \frac{x}{x+y}, \quad (2,1)$$

$$f(x,y) = \sqrt{x+e^{4y}}, \quad (3,0)$$

Linearização

Exercício

Encontre as linearizações em $(0,0)$*:*

1. $\frac{2x+3}{4y+1}$
2. $\sqrt{y+\cos^2(x)}$

Exercício

Determine uma aproximação de $\sqrt{(3,02)^2+(1,97)^2+(5,99)^2}$.

Plano tangente e reta normal

Definição

Seja f diferenciável no ponto (x_0, y_0). O plano

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(x_0, y_0)(y - y_0)$$

é chamado o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Observação:se f não é diferenciável, o plano escrito acima pode existir, mas sem ser "tangente" no gráfico.

Vetor normal (i.e perpendicular ao plano tangente): podemos re-escrever a equação do plano tangente como:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) . ((x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))) = 0$$

Assim o vetor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$ é perpendicular ao plano tangente.

Teorema

A reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dada pela equação parametrica:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t.\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício

Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada:

1. $f(x, y) = 3x^3y - xy$ *em* $(1, -1, f(1, -1))$
2. $f(x, y) = xe^{x^2 - y^2}$ *em* $(2, 2, f(2, 2))$.

Exercício

$z = 2x + y$ *é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto* $(1, 1, 1)$

1. *calcule* $f_x(1, 1)$ *e* $f_y(1, 1)$

Exercício

considere a função $f(x,y) = x.\phi(x/y)$ *onde* ϕ *é derivável. Mostre que os planos tangentes ao gráfico passam pela origem.*

Exercício

Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$ *e tangente ao gráfico de* $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Diferencial de uma função

Definição

A diferencial de $f(x, y)$ é dada por

$$df = f_x dx + f_y dy$$

Exercício

Determine a diferencial da função:

1. $z = x^3 . \ln(y^2)$
2. $R = \alpha . \beta^2 . \cos(\lambda)$
3. $T = \frac{v}{1+u.v.w}$

Mais sobre a noção de diferenciabilidade

Exercício

Seja $f(x,y)$ diferenciável em (a,b) então f é contínua em (a,b).

Exercício

Seja $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Mostre que as derivadas parciais em $(0,0)$ existem mas que f não é diferenciável em $(0,0)$. Que podemos dizer da continuidade de f_x e f_y em $(0,0)$?