MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo: Limite e continuidade

Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função de duas variáveis definida num aberto* D *que contém* (a, b). *Dizemos que o o limite de* $f(x, y)$ *quando* (x, y) *tende a* (a, b) *é* L *e escrevemos*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

se para todo $\epsilon > 0$ *existe um número* $\delta > 0$ *tal que*

$$(x, y) \in D \text{ e } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Definição

A função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é contínua em* (a, b) *se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

A função é contínua em D *se* f *for contínua em todo ponto* (a, b) *de* D.

Resumo: Limite e continuidade para funções $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis definida num aberto D que contém $(a_1, \ldots, a_n)$. Dizemos que o o limite de $f(\vec{x})$ quando $\vec{x}$ tende a $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ é L e escrevemos

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = L,$$

se para todo $\epsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$\vec{x} \in D \text{ e } 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - L| < \epsilon.$$

Definição da continuidade em $\vec{a}$: simplesmente

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}).$$

Teoremas de continuidade e do limite

Teorema (Teorema do confronto)

Se $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ *para* $0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < r$ *e se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y),$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$$

Teorema

Se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \text{ e } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M,$$

então:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f+g)(x,y) = L+M,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f.g)(x,y) = L.M,$$

Para mostrar que f não é contínua em D: é suficiente mostrar a existência de duas curvas ("caminhos") $t \mapsto \gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ e $t \mapsto \gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ passando pelo ponto (a, b) e tais que

$$\gamma_i(0) = (a, b) \text{ e } \lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = L_1 \neq L_2 = \lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t))$$

Exemplo:

Exercício

Estudo de $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ *em* $(0, 0)$.

Teoremas de continuidade

Teorema

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(A) \subset D_g$. *Se* f *for contínua em* (x_0, y_0) *e* g *contínua em* $f(x_0, y_0)$ *então* $h(x, y) = g(f(x, y))$ *será contínua em* $x_0, y_0)$.

Teorema

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *tais que* $\gamma(t) \in A$ *para todo* $t \in I$. *Se* γ *for contínua em* t_0 *e* f *contínua em* $\gamma(t_0)$ *então* $h(t) := f(\gamma(t))$ *será contínua em* t_0.

Exercício

Determine o limite se existir.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2) \qquad \lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4-xy}{x^2+3y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1+y^2}{x^2+xy}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^4+3y^4} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\sin^2 y}{2x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^3y}{2x^4+y^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4+4y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$$

Exercício

Determine o limite se existir.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(3,0,1)} e^{-xy}\sin(\pi z/2)$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+2y^2+3z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yz}{x^2+4y^2+9z^2}$$

Limite e continuidade para funções: uso de coordenadas polares

Exercício

Determine o limite se existir, utilizando coordenadas polares.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$$

Caso geral: Limite e continuidade para funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma função de n variáveis com valores em* $\mathbb{R}^m$*, isto é,* f *é dada por:*

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Então f *é contínua em* $\vec{a}$ *se e somente se todas a funções* $f_1, \ldots, f_m$ *são contínuas em* $\vec{a}$*.*

Pontos de continuidade

Exercício

Determine o conjunto dos pontos de continuidade.

1. $f(x,y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$
2. $f(x,y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Exercício

Prove que se f for contínua em (x_0, y_0) com $f(x_0, y_0) > 0$ então existe $r > 0$ tal que $f(x,y) > 0$ para todo (x,y) na bola de centro (x_0, y_0) e raio r.

Exercício

Seja f contínua em A aberto de $\mathbb{R}^2$ e seja $c \in R$. Prove que o conjunto $\{(x,y); f(x,y) < c\}$ é aberto.