MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo da ultima aula

Definição

O gráfico de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é o conjunto*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = f(x, y) \text{ onde } (x, y) \in D_f\}.$$

Definição

*As **curvas de nível** de uma função* $f(x, y)$ *são as curvas de equação* $f(x, y) = k$ *onde* k *é uma constante na imagem de* f.

Exercício

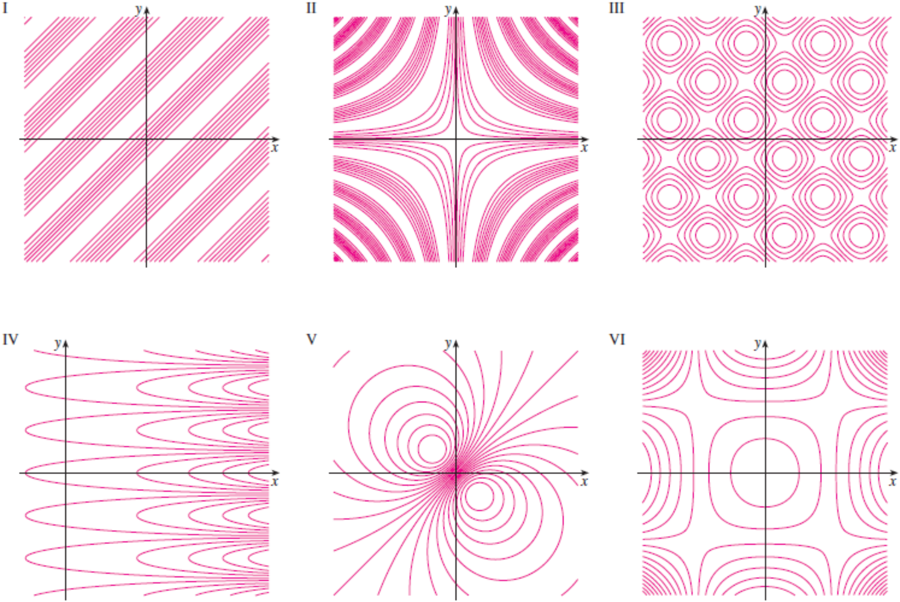
Faça uma correspondência entre as funções e os mapas de contorno.

$$z = \sin(xy) \qquad z = e^x \cos y$$

$$z = \sin(x - y) \qquad z = \sin x - \sin y$$

$$z = (1 - x^2)(1 - y^2) \qquad z = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$$

Reconhecer os mapas de contorno



Funções com três ou mais variáveis

O que podemos fazer:

Definição

As superfícies de nível são as superfícies com equação $f(x,y,z) = k$ *onde* k *é uma constante.*

Exercício

Faça um esboço das superfícies de nível.

$$f(x, y, z) = x + 3y + 5z$$

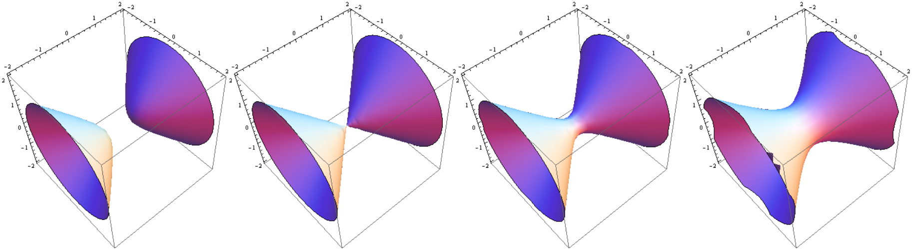
$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$$

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$$

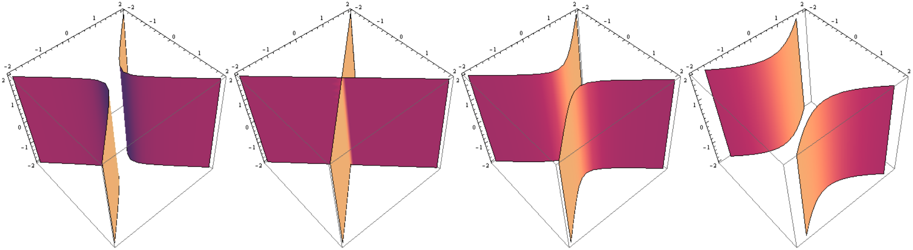
$$f(x, y, z) = x^2 - y^2$$

Lembra: hiperboloide de uma folha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e 2 folhas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Solução 3



Solução 4



Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis definida num aberto D que contém (a, b). Dizemos que o o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b) é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

se para todo $\epsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$(x, y) \in D \text{ e } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Definição

A função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em (a, b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

A função é contínua em D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D.

Para mostrar que f não é contínua em D: é suficiente mostrar a existência de duas curvas ("caminhos") $t \mapsto \gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ e $t \mapsto \gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ passando pelo ponto (a, b) e tais que

$$\gamma_i(0) = (a, b) \text{ e } \lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = L_1 \neq L_2 = \lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t))$$

Exemplo:

Exercício

Estudo de $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ em $(0, 0)$. Escolher caminhos do tipo $t \mapsto (t, mt)$ para m constante.

Exercício

Estudo de $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ em $(0, 0)$. Escolher caminhos do tipo $t \mapsto (t, mt)$ para m constante e $t \mapsto (t^2, t)$.

Limite e continuidade para funções $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis definida num aberto D que contém $(a_1, \ldots, a_n)$. Dizemos que o o limite de $f(\vec{x})$ quando $\vec{x}$ tende a $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ é L e escrevemos

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = L,$$

se para todo $\epsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$\vec{x} \in D \text{ e } 0 < \|\vec{x}\| < \delta \implies |f(\vec{x}) - L| < \epsilon.$$

Definição da continuidade em $\vec{a}$: simplesmente

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}).$$

Exercício

Determine o limite se existir.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2) \qquad \lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^4 + 3y^4} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + \sin^2 y}{2x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2 + y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2 + 2y^2}$$

Exercício

Determine o limite se existir.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(3,0,1)} e^{-xy}\sin(\pi z/2)$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+2y^2+3z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yz}{x^2+4y^2+9z^2}$$

Limite e continuidade para funções: uso de coordenadas polares

Exercício

Determine o limite se existir, utilizando coordenadas polares.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$$

Caso geral: Limite e continuidade para funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função de n variáveis com valores em $\mathbb{R}^m$, isto é, f é dada por:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Então f é contínua em $\vec{a}$ se e somente se todas a funções $f_1, \ldots, f_m$ são contínuas em $\vec{a}$.