# MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

# Resumo da ultima aula

## Definição

*O domínio da função é o conjunto de todos os pontos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $f(x, y)$ *é definida.*

## Definição

*O gráfico de* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é o conjunto*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y) \text{ onde } (x, y) \in D_f\}.$$

## Exercício

*Esboce o gráfico das funções abaixo:*

$f(x, y) = 3$

$f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

$f(x, y) = y^2 + 1$

$f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

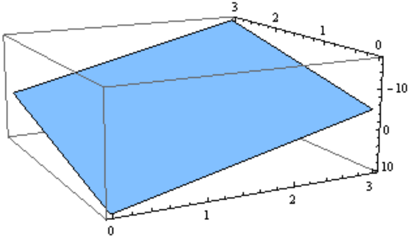
$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

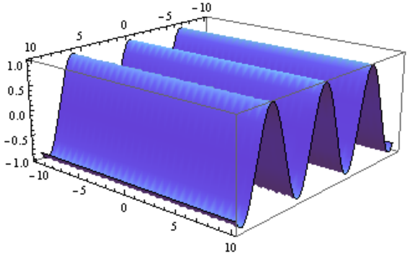
**22.** $f(x, y) = y$

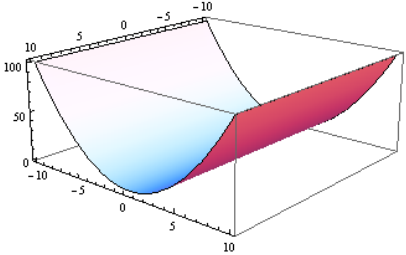
**24.** $f(x, y) = \cos x$

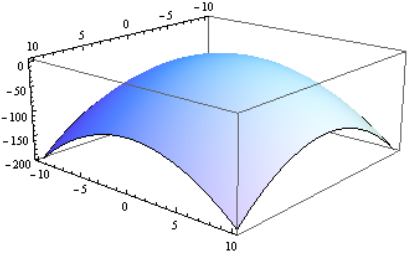
**26.** $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

# Algumas respostas

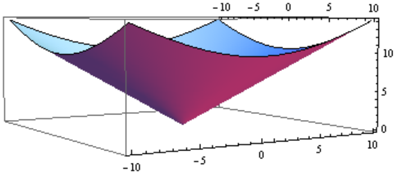


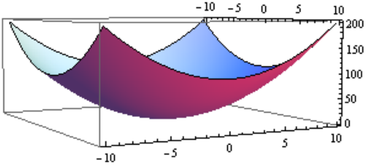



# Cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e paraboloide $z = x^2 + y^2$



# Gráficos de funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: alguns gráficos detalhados

**Gráfico de:** $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

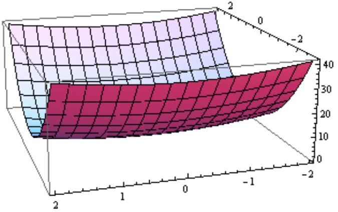
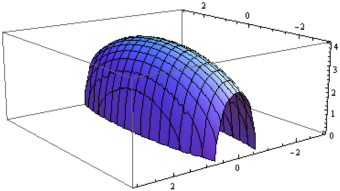
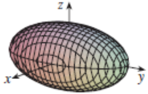
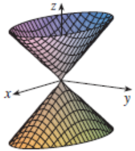
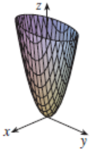
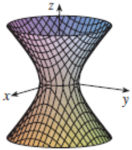


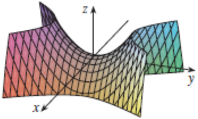
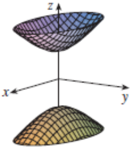

**Gráfico de:** $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$



# Superfícies quádricas I

| Superfície | Equação | Superfície | Equação |
|---|---|---|---|
| Elipsoide   | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Todos os cortes são elipses | Cone   | $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Cortes horiz.=elipses<br>Cortes vert.=hipérboles<br>ou uma par de retas. |
| Paraboloide Eliptico   | $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Cortes horiz.=elipses<br>Cortes vert. = parábolas | Hiperboloide de 1 folha   | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Cortes hor.=elipses<br>Cortes vert.=hipérboles |

# Superfícies quádricas II

| | | | |
|---|---|---|---|
| Paraboloide Hiperbólico<br> | $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$<br>Cortes hor. =hipérboles<br>Cortes vert.= parábolas. | Hiperboloide de 2 folhas<br> | $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$<br>Cortes hor. = elipses.<br>Cortes vert. = hipérboles |

# Gráficos de funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: reconhecer um gráfico

**Método 1:** desenhar algumas cortes do gráfico com planos verticais $(x = \mathit{constante})$ e $(y = \mathit{constante})$.

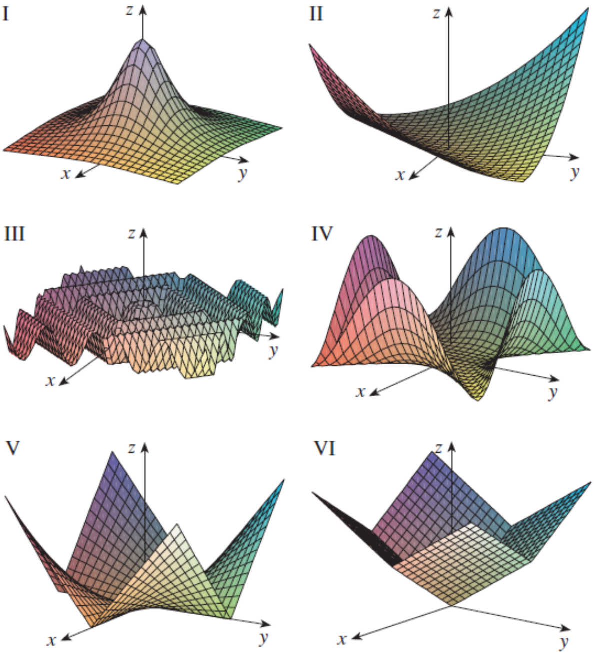
## Exercício

*Quais são os gráficos das funções abaixo?*

$$f(x,y) = |x| + |y| \qquad f(x,y) = |xy|$$

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \qquad f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$$

$$f(x,y) = (x-y)^2 \qquad f(x,y) = \sin(|x| + |y|)$$

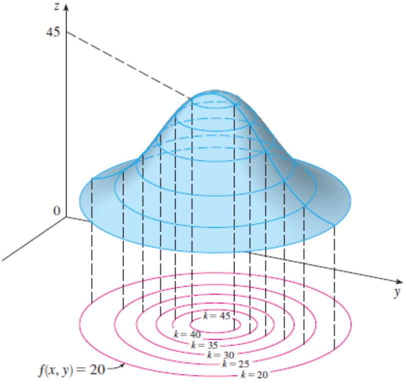

I
z
x
y
II
z
x
y
III
z
x
y
IV
z
x
y
V
z
x
y
VI
z
x
y

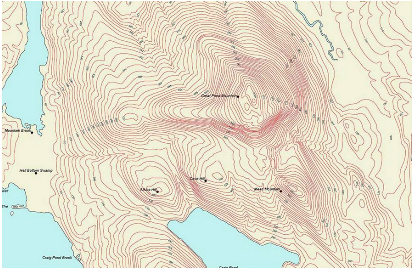
# Curvas de nível

**Definição**

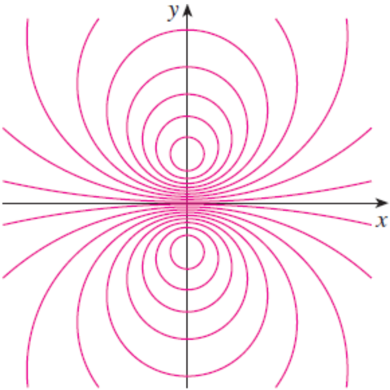
*As **curvas de nível** de uma função $f(x,y)$ são as curvas de equação $f(x,y) = k$ onde $k$ é uma constante na imagem de $f$.*

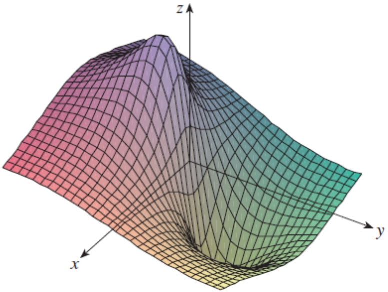
**Relação com os cortes horizontais:**



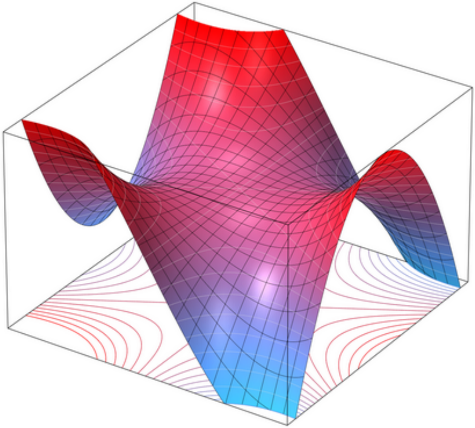



# As duas representações juntas: $f(x, y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$

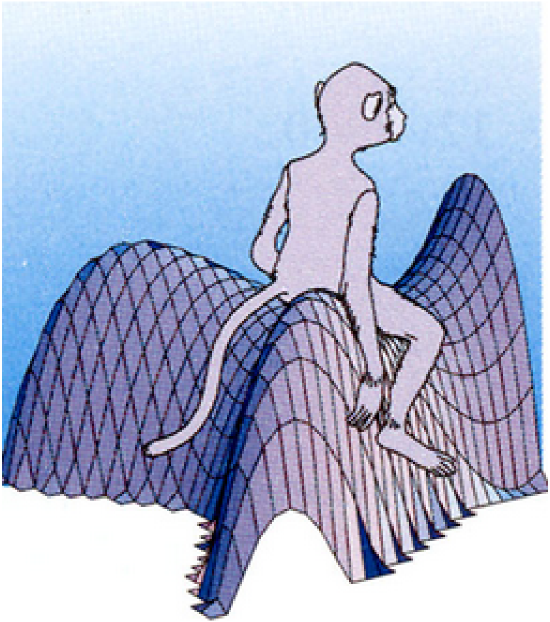


# O gráfico de $f(x,y) = xy^2 - x^3$



# O gráfico de $f(x,y) = xy^2 - x^3$



## Exercício

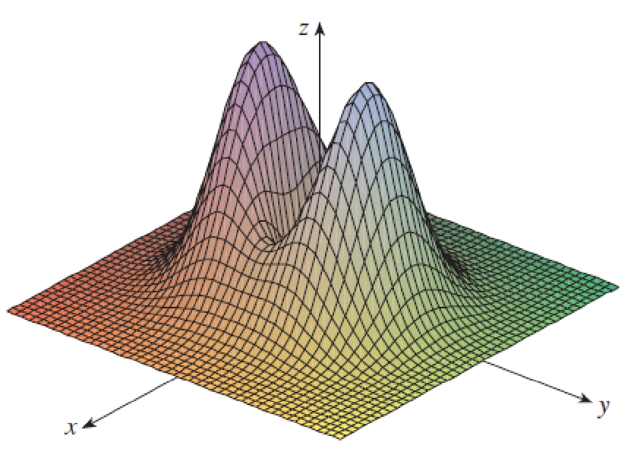
*Faça o mapa de contorno das funções:*

| | |
|---|---|
| $f(x, y) = (y - 2x)^2$ | $f(x, y) = x^3 - y$ |
| $f(x, y) = y - \ln x$ | $f(x, y) = e^{y/x}$ |
| $f(x, y) = ye^x$ | $f(x, y) = y \sec x$ |
| $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$ | $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$ |

# Mapas de contornos, dado o gráfico

## Exercício

*Faça um mapa de contorno para a seguinte função.*



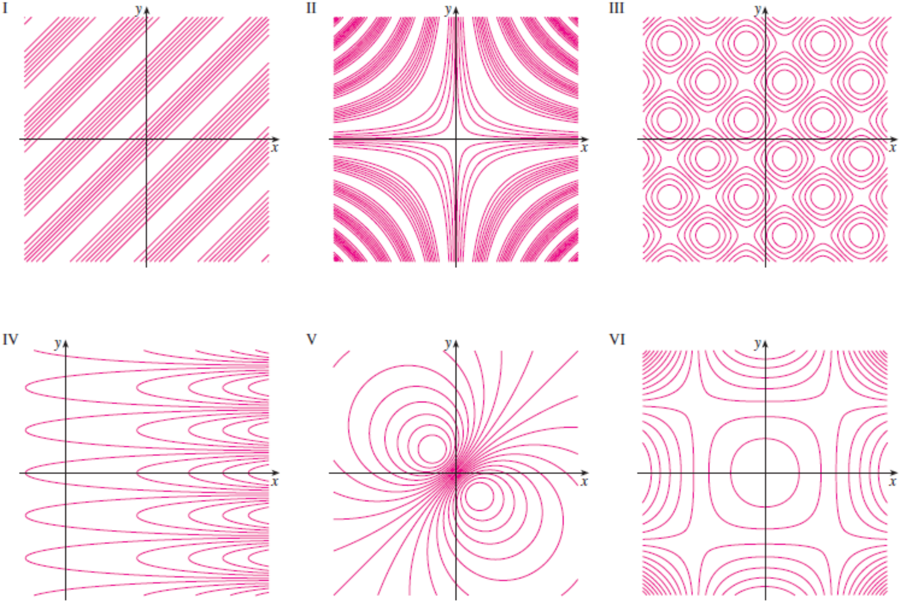
# Reconhecer os mapas de contorno

## Exercício

*Faça uma correspondência entre as funções e os mapas de contorno.*

| | |
|---|---|
| $z = \sin(xy)$ | $z = e^x \cos y$ |
| $z = \sin(x - y)$ | $z = \sin x - \sin y$ |
| $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$ | $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$ |

# Reconhecer os mapas de contorno



Domínio e gráfico têm a mesma definição, mas infelizmente não podemos desenhar o gráfico da função.

**O que podemos fazer:**

### Definição

*As superfícies de nível são as superfícies com equação* $f(x,y,z) = k$ *onde* $k$ *é uma constante.*

### Exercício

*Faça um esboço das superfícies de nível.*

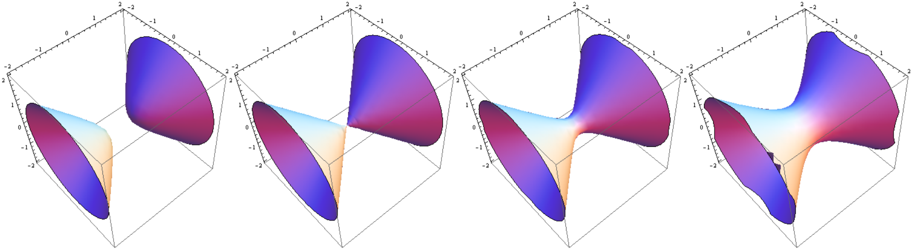
$$f(x, y, z) = x + 3y + 5z$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$$

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$$

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2$$

# Solução 3



# Solução 4