MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo da ultima auloa: funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Definição

Seja $F(t) = (F_1(t), \ldots, F_n(t))$*. As funções* $F_i(t)$ *são chamadas as funções componentes de* F*.*

Teorema

Seja $F = (F_1, \ldots, F_n)$ *uma função de uma variável com valores em* $\mathbb{R}^n$ *e* $L = (L_1, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}^n$*. Então* $\lim_{t \to t_0} F(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} F_i(t) = L_i$

Teorema

$F : A \to \mathbb{R}^n$ *é* ***contínua*** *se e somente se cada componente* F_i *é continua.*

Teorema

Sejam $F = (F_1, \ldots, F_n)$ *e* t_0 *no domínio de* F*. Então* F *é derivável em* t_0 *se e somente se cada componente de* F *for derivável em* t_0 *e a derivada* $F'(t_0)$ *é definida como:*

$$F'(t_0) := (F_1'(t_0), F_2'(t_0), \ldots, F_n'(t_0))$$

Funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis

Definição (Vetor tangente, reta tangente)

Seja $F : A \to \mathbb{R}^n$ derivável em t_0 com $\frac{dF}{dt}(t_0) \neq 0$. Nós dizemos que $\frac{dF}{dt}(t_0)$ é um vetor tangente à trajetória de F em t_0. A reta tangente T à trajetória de F no ponto $F(t_0)$ é definida pela parametrização

$$T = F(t_0) + \lambda \frac{dF}{dt}(t_0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teorema

Sejam $\vec{F}, \vec{G} : A \to \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ deriváveis em A. Então $f.\vec{F}$ e $\vec{F}.\vec{G}$ são também deriváveis e, se $n = 3$, $\vec{F} \times \vec{G}$ também, e:

1. $\frac{d}{dt}(f.\vec{F}) = \frac{df}{dt}.\vec{F} + f.\frac{d\vec{F}}{dt}$
2. $\frac{d}{dt}(\vec{F}.\vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt}.\vec{G} + \vec{F}.\frac{d\vec{G}}{dt}$
3. $\frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G} + \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt}$

Movimentos numa esfero de raio fixo

Exercício

Seja $\vec{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *derivável e tal que* $\|\vec{F}(t)\| = \textit{constante} = k \geq 0$. *Prove que*

$$\vec{F}(t).\frac{d\vec{F}(t)}{dt} = 0.$$

Calcule: $\frac{d\vec{F}}{dt}$ e $\frac{d^2\vec{F}}{dt^2}$.

ⓐ $\vec{F}(t) = (3t^2, e^{-t}, \ln(t^2+1))$

$$\Rightarrow \vec{F}'(t) = \left(6t, -e^{-t}, \frac{2t}{t^2+1}\right) \text{ e } \vec{F}''(t) = \left(6, e^{-t}, \frac{2(t^2+1) - 2t(2t)}{(t^2+1)^2}\right) = \left(6, e^{-t}, \frac{-3t^2+2}{(t^2+1)^2}\right)$$

Determine a equação da reta tangente no ponto dado:

ⓑ $F(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t^2\right)$ no ponto $F(2)$

Equação da reta tangente: $\boxed{G(\lambda) = F(2) + \lambda \cdot F'(2)}$

aqui: $F(2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\right)$ e $F'(t) = \left(-\frac{1}{t^2}, -\frac{1}{t^2}, 2t\right)$ então $F'(2) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 4\right)$

Conclusão: a equação da reta tangente, no ponto $F(2)$ é: $G(\lambda) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\right) + \lambda \cdot \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 4\right)$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}, 4 + 4\lambda\right).$$

ⓒ $F(t) = (t, t^2, t, t^2)$ no ponto $F(1) = (1,1,1,1)$.

Resposta: $G(\lambda) = (1,1,1,1) + \lambda\,(1,2,1,2)$.

Derivação de produtos vetoriais

Seja $F : I \to \mathbb{R}^n$. Suponha: $F'(t) = \vec{0}\ \forall t \in I$. Mostre que existe uma constante $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ tal que $F(t) = \vec{k}\ \forall t \in I$.

Resp: $F'(t) = (F_1'(t), \dots, F_n'(t)) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}\ F_i'(t) = 0$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}\ F_i(t) = \text{constante} = k_i$.

(Lembra: $\forall a, b \in I$, $\underbrace{\int_a^b F_i'(t)\,dt}_{=0} = F_i(b) - F_i(a) \Rightarrow \forall a, b \in I$, $F_i(a) = F_i(b)$ isto é, F_i é constante.)

Seja $\vec{F} : I \to \mathbb{R}^3$, I intervalo, derivável até a segunda ordem.
Suponha: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que: $\forall t \in I$, $\dfrac{d^2 \vec{F}(t)}{dt^2} = \lambda \vec{F}(t)$. Prove: $\vec{F}(t) \times \dfrac{d\vec{F}}{dt}(t) = \text{constante}$ em I.

Resp: $$\frac{d}{dt}\left(\vec{F}(t) \times \frac{d\vec{F}}{dt}(t)\right) = \underbrace{\frac{d\vec{F}}{dt}(t) \times \frac{d\vec{F}}{dt}(t)}_{=\vec{0}} + \vec{F}(t) \times \frac{d^2\vec{F}}{dt^2}(t) = \vec{F}(t) \times \lambda \vec{F}(t) = \vec{0}.$$

Aplicação: $\vec{x}(t) =$ posição, seja $\vec{G}(t)$ uma força "central" (i.e $\vec{G}(t) = \lambda(t).\vec{x}(t)$)

$\Rightarrow$ o momento angular $\vec{x} \times m\vec{v}(t)$ é constante. (Newton: $m.\vec{x}''(t) = \vec{G}(t) = \lambda(t)\vec{x}(t)$).

Exemplo: gravitação $\vec{G}(t) = \dfrac{GMm}{\|\vec{x}(t)\|^3} . \vec{x}(t)$. Observação: teorema funciona com $\lambda(t)$ não constante!

Posição, velocidade, aceleração

Suponha: $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ seja derivável até a segunda ordem e que: $\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{t}$, $\forall\, t \geqslant 0$.

ⓐ Prove: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) = -\vec{r}(t) \cdot \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$

ⓑ O ângulo θ entre $\vec{r}$ e $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)$ é entre $\frac{\pi}{2}$ e π.

ⓐ temos que $\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{t} \Rightarrow \|\vec{r}\|^2 = t \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\|\vec{r}(t)\|^2 = 1$

mas, lembra que: $\|\vec{r}(t)\|^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)$ também, e que $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)\right) = \vec{v}(t)\cdot\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t)$
$= 2\,\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t)$

Então: $\dfrac{d^2}{dt^2}\|\vec{r}(t)\|^2 = \dfrac{d}{dt}1 = 0$, e isso implica: $\dfrac{d}{dt}\left(2\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t)\right) = 0$, isto é $2\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t) + 2\vec{r}(t)\cdot\vec{a}(t) = 0$

Finalmente: $\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t) = -\vec{r}(t)\cdot\vec{a}(t)$, i.e $\boxed{\dfrac{d\vec{r}}{dt}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{r}\cdot\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}.}$

ⓑ $\vec{r}\cdot\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\left\|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right\|^2 \leqslant 0$, mas também:

$$\vec{r}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \|\vec{r}\|\cdot\left\|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\|\cdot\cos\left(\vec{r}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) \Rightarrow \cos\left(\vec{r}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) \leqslant 0 \Rightarrow \text{ângulo } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Pergunta: sejam $P_1, \dots, P_9$ pontos na esfera.

Mostre que: $\exists$ 2 deles que fazem um ângulo $\leqslant \frac{\pi}{2}$ (com a origem).

Vetor unitário $\vec{T}$ e propriedades

Seja a posição: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 . t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2$, com $\vec{r}_0, \vec{v}_0, \vec{a}_0$ constantes. Calcule $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$.

Temos: $\vec{v}(t) = \vec{0} + \vec{v}_0 + \vec{a}_0 . t$ e $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$.

Suponhamos $\|\vec{v}(t)\| = \text{constante} = k$. Prove: $\vec{v}(t) . \vec{a}(t) = 0 \ \forall t$.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\vec{v}(t).\vec{v}(t)}_{= 2\vec{v}(t).\vec{a}(t)} = \frac{d}{dt} k^2 = 0 \ !$$

Suponha: $\|\vec{v}(t)\| \neq 0 \ \forall t$. Faça $\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$ onde $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$.

Prove (a) $\vec{T}$ e $\frac{d\vec{T}}{dt}$ são ortogonais

(b) $\vec{a} = v(t) \frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{dv}{dt}\vec{T}$.

(a) $\frac{d\vec{T}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{v(t)}\right) . \vec{v}(t) + \frac{1}{v(t)}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{-v'(t)}{v^2(t)}\vec{v} + \frac{1}{v(t)}\frac{d\vec{v}}{dt}$.

Agora: $v^2(t) = \vec{v} . \vec{v} \Rightarrow 2v(t)v'(t) = 2\vec{v}(t) . \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{T} . \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{-v'}{v^2}\vec{v} . \frac{\vec{v}}{v} + \frac{1}{v}\frac{d\vec{v}}{dt} . \frac{\vec{v}}{v} = -\frac{v'}{v} + \frac{2}{2v^2}\frac{d\vec{v}}{dt} . \vec{v} = -\frac{v'}{v} + \frac{2vv'}{2v^2}$
$= 0$.

(b) $\vec{v}(t) = v(t) . \vec{T}(t) \Rightarrow \vec{a}(t) = v'(t) . \vec{T}(t) + v(t) . \vec{T}'(t)$.

Movimento numa elipse: Seja $\vec{r}(t) = a\cos wt\,\vec{i} + b\,\mathrm{sen}\,wt\,\vec{j}$, onde a, b, w são constantes.

mostre: $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r}$.

Simplesmente, $\dfrac{d^2}{dt^2}\cos wt = -w^2\cos wt$ e também: $\dfrac{d^2}{dt^2}\mathrm{sen}\,wt = -w^2\,\mathrm{sen}\,wt$

Então: $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r}$.

Determine $\vec{r} = \vec{r}(t)$ sabendo que: ⓐ $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = t\vec{i} + 2\vec{k}$ e $\vec{r}(0) = \vec{i} + \vec{j}$.

ⓑ $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \mathrm{sen}\,t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j} + \dfrac{1}{t+1}\vec{k}$, $t \geq 0$ e $\vec{r}(0) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

ⓐ $\vec{r}(t) = \dfrac{t^2}{2}\vec{i} + 2t\vec{k} + \vec{c}$. Agora, $\vec{r}(0) = \vec{0} + \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{c} = \vec{i} + \vec{j}$.

ⓑ $\vec{r}(t) = -\cos t\,\vec{i} + \dfrac{1}{2}\mathrm{sen}\,2t\,\vec{j} + \ln(t+1)\vec{k} + \vec{c}$.

Para $t = 0$: $\vec{r}(0) = -\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} + \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Regra da cadeia para funções vetoriais

Regra da cadeia: Sejam $t \mapsto u(t)$, $t \in I$, $u \mapsto \vec{F}(u) \in \mathbb{R}^n$, $u \in J$, deriváveis, onde I e J são intervalos em $\mathbb{R}$. Suponha: $\forall t \in I$, $u(t) \in J$. Prove que $\vec{H}(t) = \vec{F}(u(t))$, $t \in I$, é derivável e que:

$$\boxed{\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d\vec{F}}{du}(u(t))\,\frac{du}{dt}}.$$

① $\vec{H}(t)$ derivável: seja $\vec{F}(u) = (F_1(u), \dots, F_n(u))$, então: $\vec{H}(t) = (F_1(u(t)), \dots, F_n(u(t))) = (H_1(t), \dots, H_n(t))$

Agora, cada $H_i(t)$ é derivável (pela regra da cadeia) $\Longrightarrow \vec{H}$ é derivável.

② Formula pela derivada: Sabemos que $H_i'(t) = F_i'(u(t)) \cdot u'(t)$, então: $\vec{H}'(t) = \underset{\substack{\| \\ \frac{du}{dt}}}{u'(t)} \cdot \underbrace{(F_1'(u(t)), \dots, F_n'(u(t)))}_{\substack{\| \\ \frac{d\vec{F}}{dt}(u(t))}}$.

Consequência: podemos aplicar isso para curvas polares.

Movimento e coordenadas polares

movimento e coordenadas polares: suponha $\vec{u}_\rho(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\,\theta\,\vec{j}$, e $\vec{u}_\theta(\theta) = -\text{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$, e $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho(\theta(t))$, com $\theta = \theta(t)$, e $\rho = \rho(t)$ de classe C^2.

(a) Mostre: $\frac{d}{dt}\vec{u}_\rho(\theta) = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta(\theta)$.

$\frac{d}{dt}\cos\theta(t) = -\text{sen}\,\theta(t)\cdot\dot{\theta}$ e $\frac{d}{dt}\text{sen}\,\theta(t) = \cos\theta(t)\cdot\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{u}_\rho(\theta) = -(\text{sen}\,\theta(t))\cdot\dot{\theta}\,\vec{i} + [\cos(\theta(t))]\dot{\theta}\,\vec{j} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta(\theta(t))$.

(b) Mostre: $\frac{d}{dt}\vec{u}_\theta(\theta(t)) = -\dot{\theta}\,\vec{u}_\rho(\theta)$.

Podemos utilizar a regra da cadeia também: $\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d\vec{F}}{dt}(u(t))\frac{du}{dt}$

com $u(t) = \theta(t)$, $\vec{F}(u) = $ "$\vec{F}(\theta)$" $= (\cos\theta, \text{sen}\,\theta) \Rightarrow \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d\vec{F}}{d\theta}(\theta(t))\frac{d\theta}{dt}$.

(c) $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

Temos: $\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho(\theta(t)) + \rho(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{u}_\rho(\theta(t)) = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

(d) $\vec{a} = [\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2]\vec{u}_\rho + [2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}]\vec{u}_\theta$

Temos: $\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \underbrace{\dot{\rho}\frac{d}{dt}\vec{u}_\rho}_{\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta} + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \underbrace{\rho\dot{\theta}\frac{d}{dt}\vec{u}_\theta}_{-\rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho}$

Exemplo: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Definição

O domínio da função é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $f(x, y)$ *é definida.*

Exercício

Determine o domínio de $f(x, y) = \frac{x-y}{x+2y}$. *Calcule* $f(2u + v, v - u)$.

Exercício

Para $f(x, y) = 3x + 2y$, *calcule* $\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$

Domínios de funções

Exercício

Represente graficamente o domínio de $z = f(x,y)$.

1. $\frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
2. $z^2 + 4 = x^2 + y^2, z \leq 0.$
3. $z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}$

Definição

Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é homogênea de grau* λ *se*

$$f(tx, ty) = t^{\lambda} f(x,y).$$

Exercício (Homogenização de um polinômio)

Seja $P(x)$ *um polinômio de grau* n. *Mostre que* $y^n.P(x/y)$ *é homogênea de grau* n.

Exemplos de funções homogêneas

Exercício

Verifique se f é homogênea:

1. $f(x,y) = \frac{x^3+2xy^2}{x^3-y^3}$
2. $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$.
3. $f(x,y) = 5x^3y + x^4 + 3$.