MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Os espaços $\mathbb{R}^n$

Definição

O produto escalar dos vetores $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *denotado por* $\vec{x}.\vec{y}$ *é um número real, definido por*

$$\vec{x}.\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n$$

Definição

$\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *são perpendiculares (ou ortogonais) se* $\vec{x}.\vec{y} = 0$

Definição

Norma do vetor $\vec{x}$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2} = \sqrt{\vec{x}.\vec{x}}$.

Teorema (Desigualdade de Schwarz, ou Cauchy-Schwarz)

Para $\vec{x}, \vec{y}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *temos*

$$|\vec{x}.\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|.$$

Consequências

Exercício

Mostre a desigualdade triangular:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Exercício

Mostre que para qualquer vetor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*:*

$$\|\vec{x}\| \geq |x_i|$$

Exercício

Seja $\vec{u}$ *um vetor qualquer de* $\mathbb{R}^n$*. Prove que se* $\vec{u}.\vec{v} = 0$ *para todo vetor* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$*, então* $\vec{u} = \vec{0}$*.*

Conjuntos abertos

Definição

A bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$ é

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$$

Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. O ponto $x \in A$ é um ponto interior de A se existir uma bola aberta de centro (x_0, y_0) contida em A.

Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. A é um conjunto aberto se todo ponto de A for ponto interior.

Exercício

Mostre que cada bola aberta é u conjunto aberto.

Conjuntos abertos

Exercício

Quais dos conjuntos abaixo são abertos:

1. $\{(x,y); xy > 0\}$
2. $\{(x,y); x^2 + xy + y^2 < 0\}$
3. $\{(x,y); x + y \geq 1\}$

Definição

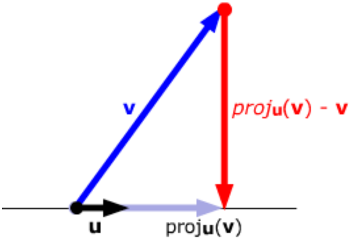
Seja F um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. O conjunto F é fechado se $\mathbb{R}^2 - F$ for aberto.

Exercício

Quais dos conjuntos abaixo são fechados:

1. *O disco fechado de raio 1;*
2. $\{(x,y); x = 1, 1 \leq y \leq 3\}$

Projeção de um vetor



Definição

A projeção do vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é o unico vetor $\vec{w} = proj_{\vec{u}}\vec{v}$ tal que:

1. *existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \lambda\vec{u}$ (i.e $\vec{w}$ e $\vec{u}$ são colineares),*
2. *$\vec{w} - \vec{v}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares.*
   A projeção $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ é dada por:

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

Projeção de um vetor II

Definição

Seja $\vec{e}$ o vetor unitário na direção de $\vec{u}$ (isto é $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$). Podemos escrever então $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ como um multiplo de $\vec{e}$,

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \lambda\vec{e} = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{x}\|}\vec{e}.$$

O escalar $\frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{x}\|}$ é chamado a projeção escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Exercício

Use a projeção escalar para mostrar que a distância de um ponto $P_1(x_1, y_1)$ à reta $ax + by + c = 0$ é

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

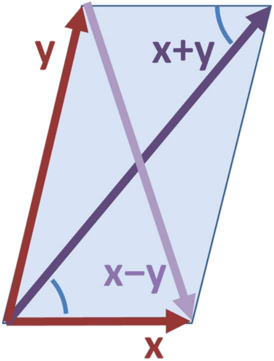
Exercício

Se $\vec{c} = \|\vec{a}\|\vec{b} + \|\vec{b}\|\vec{a}$, *mostre que c é bissetriz do ângulo entre* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$.

Exercício

Mostre a lei do Paralelogramo:

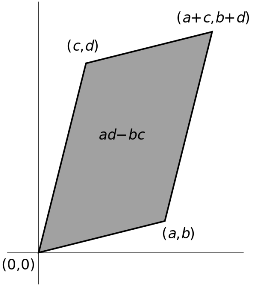
$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$



Determinante de uma matriz quadrada

Determinante de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



Interpretação geométrica: O valor absoluto do determinante é a área do paralelogramo formado pelos vetores (a, b) e (c, d).

Exercício

Mostre essa interpretação.

Determinante 3×3: expansão de Laplace

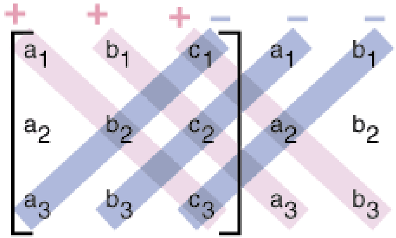
$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{a} & b & \cancel{c} \\ d & \cancel{e} & f \\ g & \cancel{h} & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & c \\ d & e & \cancel{f} \\ g & h & \cancel{i} \end{bmatrix}$$

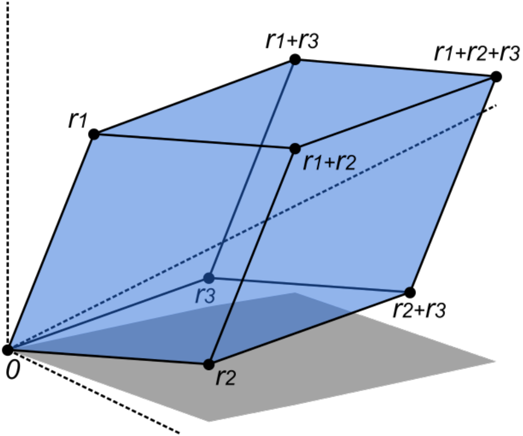
Determinante 3×3: regra de Sarrus



$$\det A = (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

Determinante 3×3: interpretação geométrica

Sejam r_1, r_2, r_3 as três linhas da matriz 3×3. O valor absoluto do determinante dela é o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$.



Determinante e álgebra linear

Definição

Uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é multilinear se:*

$$F(\vec{x}_1, \ldots, \alpha\vec{u}_i + \beta\vec{v}_i, \ldots, \vec{x}_n) = \alpha F(\vec{x}_1, \ldots, \vec{u}_i, \ldots, \vec{x}_n) + \beta F(\vec{x}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{x}_n)$$

para qualquer escolha de $i \in \{1, \ldots, n\}$, *qualquer* $\vec{u}_i, \vec{v}_i$.

Definição

Uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é multilinear alternada se* F *é multilinear e também:*$F(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = 0$ *se* $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ *para um par* (i, j).

Definição

O determinante $det(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ *é a única aplicação multilinear alternada tal que*

$$det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1,$$

onde $\vec{e}_i := (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ *(i.e o 1 esta na posição i).*

Produto vetorial, em $\mathbb{R}^3$

Formula para $\vec{u} \wedge \vec{v}$ também escrito como $\vec{u} \times \vec{v}$:
dados $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (b_1c_2 - c_1b_2)\vec{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Produto vetorial e determinante:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Lemma

$\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Demonstração:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 \\ &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 + b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

Teorema

Seja $\theta \in [0, \pi]$ o angulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, então:

$$||\vec{a}\times\vec{b}|| = ||\vec{a}||\,||\vec{v}||\text{sen}\theta$$

Produto vetorial

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\
&\qquad + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

Os quaterníons

Definição

Um quaternion é uma soma $a + bi + cj + dk$ onde $a, b, c, d \in R$ e i, j, k satisfazem:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k$$

$$jk = i$$

$$ki = j$$

Definição

O conjugado de $q = a + bi + cj + dk$, é definido por $\bar{q} = a - bi + cj + dk$. A norma de q é $N(q) = \sqrt{q.\bar{q}} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Os quaterníons

Lemma

O produto
$(q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)(r_0 + ir_1 + jr_2 + kr_3) = (t_0 + it_1 + jt_2 + kt_3)$ *onde:*

$$
\begin{aligned}
t_0 &= (r_0q_0 - r_1q_1 - r_2q_2 - r_3q_3) \\
t_1 &= (r_0q_1 + r_1q_0 - r_2q_3 + r_3q_2) \\
t_2 &= (r_0q_2 + r_1q_3 + r_2q_0 - r_3q_1) \\
t_3 &= (r_0q_3 - r_1q_2 + r_2q_1 + r_3q_0)
\end{aligned}
$$

Exercício

Mostre que $N(q_1.q_2) = N(q_1)N(q_2)$.

Definição

O conjugado de $q = a + bi + cj + dk$, *é definido por* $\bar{q} = a - bi + cj + dk$. *A norma de* q *é* $N(q) = \sqrt{q.\bar{q}} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.